

《九章算术》中“均输”、 “方田”等算法的由来⁽¹⁾

杜石然

《九章算术》是《算经十书》中最重要的一部。提起《算经十书》，人们当然不会忘记、也很怀念前贤和当代诸贤达的工作。《算经十书》这一名称乃是乾嘉学派的戴震(1724-1777)、孔继涵(1739-1783)等人在整理出版中国古典算书过程中首先使用的。到了上一世纪20年有李俨(1892-1963)、钱宝琮(1892-1974)，稍后又有严敦杰(1917-1988)三先生先后开展了中国数学史的研究工作。特别是在60年代钱先生出版了经他校点的《算经十书》，成为继乾嘉戴震戴东原之后的又一阶段性工作。到了70-80年代有吴文俊先生，之后又有白尚恕、李继闵(可惜两位已经过早去世)、沈康身、李迪、梅荣照、何绍庚、郭书春等教授，也都作了许多出色的工作。之后就是当代的王渝生、刘钝、李兆华、罗见今教授以及许许多多虎虎生气的更新的一代的新人。从上个世纪50年代的戴内清、别廖兹金娜起，许多外国学者参加到中算史的研究工作中来了。著名的例子还可以举出当代的“巴黎三剑客”：林丽娜、詹嘉玲、马若安三位教授。著名的工作可以举出川原秀城的《九章算术》日译本，Clously-沈康身的《九章算术》的英译本，林丽娜-郭书春的《九章算术》的法译本。《九章算术》是《算经十书》中最重要的一部著作，它当然地吸引了全世界学者的注意，今后，我想它也仍将会是如此。

(一)关于《九章算术》成书的时代背景——两汉

《九章算术》成书于两汉时期。两汉时期的数学，和两汉时期的其他科学技术一样，都有着一些特有的时代特点。其重要特点之一，就是许多门类的科学技术，大都在其各自发展的过程中，在两汉时期形成了各自的体系。除了各个学科本身的内在的原因之外，从总体上讲，有那么多的学科都在同一的两汉时期形成了自己的体系，应该说存在着一种明显的趋同现象。他们应该都是来自一个共同的原因——两汉时期所共有的时代背景。

上承横扫六合完成统一大业的秦帝国，并且吸取了秦王朝短命二世而

亡的教训,经过楚汉相争而夺得天下的汉王朝,虽说是“秦皇汉武,略输文采”,但却以其雄浑刚健的气魄,不只是开创了汉王朝它自己的四百年家业天下,而且也开创并且构筑了其持续了大约二千年之久的封建国家方方面面的基本模式。两汉时期,从作为社会基础的经济形态(以小农经济为主的农本主义)、国家型制(中央集权的皇帝独裁)、到官僚体系(六部、百官、以及从中央到地方的各级官员),甚至它的罢黜百家独尊儒术的意识形态政策,都无不成为其后持续大约二千年历朝历代封建帝国所效法的模式和样板。

两汉时期,从中国悠久的历史来说,就是这样一个开创模式和树立样板的时代。在科学技术方面,也是如此。科学技术的许多门类,多是在两汉时期,定下其后影响悠久的模式并且出现了实际上是为后世树立了样板的著作。

例如,汉武帝时期编制的《太初历》,通过西汉末年刘歆编制的《三统历》,在《汉书·律历志》中记录流传下来,成为后世历代各种历法的模式和样板。阴阳合历的模式,其中包括了气、朔、闰、交食、五星、晷漏等完备的具有中国特色的历法体系。虽然中国历法在漫长的发展的进程中,其计算方法和观测技术曾经不断地得到改进、不断地取得成就,但是其基本的模式、框架则一直被遵循下来,甚至在西方近代历法已经传入的明清时代(《大统历》、《时宪历》),也没有改变。

其次,数学方面则出现了以算筹为主要计算工具、以解决实际应用问题为主要目的、以《九章算术》为模式范本的体系。其影响所及,直到明朝中叶。

再次,医药学方面:形成了以《内经》、《伤寒论》为代表经典的医学理论,和以《神农本草经》为代表的传统药物学体系。到了现代,这些著作依然被奉为中医界的经典。

还有,在地理学方面:则形成了以《汉书·地理志》为模式样板的疆域沿革地理学体系,成为后世诸“正史”中《地理志》的楷模。

还有,中国古代地图学也自成一个独特体系并取得很大成就。它一直采取的是直交网格法,这是一种将大地视作平面来绘制地图的投影方法,而较少考虑大地是一球面。

对后世产生久远影响的各个学科体系,如上所述,大都在两汉时期形成,这虽然不能牵强的论断为汉代大一统局面的出现是有直接的联系。但是大

一统作为一个时代的潮流,它不可能不影响到整个社会的方方面面。特别是这种统一局面的形成,使得融合、综合、归纳、立法式、定规程等等在社会上形成了一股强劲的社会思潮,于是人们总结前人经验,创立新的构架,继往开来,创制各自学科的体系。

(二)均输、方田等算法大都来自先秦

虽然《九章》成书于两汉,但是其中的一些算法很多都是先秦时代早已有之。

人尽皆知,例如均输、方田等都是《九章算术》的章名,同时它们也又都是一种算法。九章算术中的章名虽然只有九个,但是各章之中所记述的算法,却有更多。关于《九章算术》(当然也包括其中的那许多算法)的源流,刘徽在《九章算术序》中说“按周公制礼而有九数,九数之流,则九章是矣”。刘徽认为《九章算术》以及其中的那些算法,其来源都可能是相当久远的。现代的数学史家们也大都认为,《九章算术》的成书年代虽然在东汉时期(采用钱宝琮先生说),但是其中的许多算法都可能早已产生。例如钱先生就曾论述过,西汉时期武帝均输法令的颁行就在《九章算术》“均输”一章成书之前。实际上《周礼》中所记载的“均人”和“土均”这两种官员的工作,已经需要用到类似“均输”的算法。同样,“方田”章的面积计算,也应当和政府官员按田亩面积进行税收工作有关,因此它的出现也应该更早。如此等等。由于《算数书》的出土以及对它的研究,使人们可以更加肯定地说:《九章算术》中的大部分算法,大多来源于先秦。其中最早的,甚至可以追溯至春秋时代或者更早。下面仅就其中的若干算法,略加讨论。

1,“方田”和“初税亩”

《九章算术》“方田”章共有38个问题,除第5至第18题是有关分数计算的各种算法之外,其余各题所叙述的都是和面积计算有关的算法。例如:“方田(直田)术”(求矩形田面积的算法)、“里田术”(大面积矩形田面积)、“乘分术”(长宽为分数的矩形田)、“大广田术”(长宽为带分数的矩形田)、“(圭田)术”(三角形田的面积)、“邪田术”“箕田术”(梯形田面积)、“(圆田)术”(圆形田面积),此外还有“宛田术”、“弧田术”、“(环田)术”。

计算田亩面积,从古代的社会需求来说,大致上可以有三个方面。其一

就是通过面积大小来估算产量；其二就是按面积大小来征收农业税；其三就是进行土地买卖。

如果说估算产量(有的学者认为甲骨文中的“相田”即是进行估产)是否必须进行计算田亩面积还抱有怀疑的话,那么征收农业税,特别是按面积大小征收农业税,就必须进行面积计算了。按田亩面积大小收税,即所谓“履亩而税”的税法,按现在已知的文献资料,最早,春秋时的鲁国便施行了按占有田亩实数来征收田赋的赋税制度。人们经常引用的一条资料就是:鲁宣公十五年(前594)实行“初税亩”(《左传·宣公十五年》)。《谷梁传》中还有:“古者三百步为里,名曰井田。井田者,九百亩,公田居一”,“初税亩者,非公之,去公田而履亩,十取一也”。这也可以看作是对左氏传的解释和补充。“初税亩”推翻过去农民助耕公田为官府财源的旧制度,创造了不分公田私田以土地面积为根据,向田主征收实物税的新制度。这一重大社会变革所需要的却是对田亩面积的计算。当然,最初可能是矩形田面积的测算,其次则是三角形田面积的测算。虽然天上的日月,地上的陶轮、车轮,尤其是后者,更可能启发人们的“一中同长”的关于“圆”的概念。但是圆形面积的计算,似乎应该是更晚一些时候才可能产生的事。各类图形面积的测算所使用的方法,似乎都应该是累叠单位方形的网格法。关于网格法的发生和发展,则应另行讨论。

关于“履亩而税”的资料还可以举出:《国语·齐语》中的:“相衰而征之”。

继鲁国之后,中原各国也大都采用了按亩征税的税法。只有秦国,直到秦简公(前408)方才施行“初租禾”(见《史记·六国年表》),是各国之间最晚的。但是《汉书·食货志》说:秦商鞅变法“除井田,民得买卖”,《史记·秦始皇本纪》中记载说:“始皇三十一年(前216),使黔首自实田”,那么,秦国却成了施行土地买卖制度的先驱。

当然,当边长不是整数而是分数时,也就是说关于分数计算的历史,是需要另行讨论的。

2,“均输”

《史记·平准书》、《前汉书·食货志》并称:“桑弘羊为大司农。管诸会计事,稍稍置均输,以平货物矣。”《史记·秦始皇本纪》:“调郡县,转输菽粟

刍”。宋代时(王)安石创新法,苏轼上书论其不便时说:“汉武帝以财力匱竭,用古人桑羊之说,买贱卖贵,谓之均输。”“……昔于时商贾不行,盗贼滋炽,几至于乱。孝昭既立,霍光顺民所欲而予之,天下归心,遂以无事。不意今日此论复兴,立法之初,其费以厚,纵使薄有所获,而征商之额,所损必多”(《宋史·苏轼传》,见中华校点本《宋史》10806页)。这些都说明早在《九章算术》均输章成书之前,西汉时期的武帝就曾经颁行过均输法令。其实,早在武帝之前,在《周礼》中,就曾经记载有“均人”和“土均”两种官员。他们的工作,已经需要用到某些类似“均输”的算法了。

《周礼·地官》中关于“均人”这种官员的数目记述说:“均人:中士二人、下士四人、府二人、史四人、胥四人、徒四十人。”关于“土均”的人数,《周礼·地官》的记载是:“土均:上士二人、中士四人、下士八人、府二人、史四人、胥四人、徒四十人。”

关于“均人”的职务范围,《周礼·地官》的记载说:“均人掌均地政,均地守,均地职,均人民牛马车犂之力政。凡均力政,以岁上下,丰年则公旬用三日焉,中年则公旬用二日焉,无年则公旬用一日焉,凶札则无力政、无财赋、不收地守地职、不均地政。三年大比,则大均。”

关于“土均”的职务范围,《周礼·地官》的记载说:“土均掌平土地之政,以均地守,以均地事,以均地贡。以和邦国都鄙之政令刑禁,与其施舍礼俗丧纪祭祀。皆以地媮恶为轻重之法,而行之掌其禁令。”

“均人”职务中的:“均地政,均地守,均地职,均人民牛马车犂之力政”,以及“土均”职务中的“均地守”、“均地事”、“均地贡”,都是使各种赋税均平的工作。其实,这也就是“均输”的工作。

关于《周礼》的成书年代,虽然曾有汉刘歆伪造之说,但经杨向奎先生研究,最迟不会晚于战国时齐人所作之说已成公认定论。根据近年学者的研究,将西周金文中所见官制与《周礼》所言相参证,则《周礼》中记载的官制有相当成分为西周官制之实录,当然其中也不是没有后人理想化的成分。(见陈汉评《西周册名制度研究》学林出版社,1986,241页)由此可见,“均输”的思想由来甚早,“均输”的算法也应该是相当早的。

3,“句股”章中的算法和中国早期的地图绘制

根据下述《周髀算经》中的文字,这些文字是以周公和商高的对话的形

式来记述的,则“句股”章中的一些算法,其起源可能也是比较早的。我们想引用的第一段文字是:“商高曰:数之法出于圆方,圆处于方,方出于矩,矩出于九九八十一。以为句广三,股修四,径隅五……禹之所以治天下者,此数之所由生也。”我们想引用的第二段文字是:“周公曰:大哉言数,请问用矩之道。商高曰:平矩以正绳,偃矩以望高,覆矩以测深,卧矩以知远,环矩以为圆,合矩以为方,方属地,圆属天,天圆地方。……知地者智,知天者圣。智出于句,句出于矩。夫句之于数,其裁制万物,唯所为耳。”

从以上两段文字来看,早期的水利工程、天文测量、地图的绘制等等,都需要用到“句股”章中的一些算法。下面,利用已经出土的地图实物,来进行一些验证。

现在已知,在考古发掘中曾发现的中国早期的古代地图,有马王堆地图和放马滩地图。

1973年湖南长沙马王堆3号墓中,和许多出土文物一道,曾经出土了3幅古地图。其中以“地形图”最为精美,科学价值也极高。“地形图”是绘制在长宽都是96cm的正方形的丝绢上的。地图所描绘的范围是东经111—112.5度,北纬23—26度之间,即相当于是现在的广西全州、灌阳一线以东,湖南新田、广东连县一线以西;北起新田、全州,南至广东珠江口的大片地区。从水系方面讲,其范围属于今湘江上游的潇水流域;从山系方面讲,则是属于岭南九嶷山及其附近地区;其中最大的市镇是深平。所以这幅地图出土后即被考古人员命名为:“西汉初期长沙国深平防区地形图”(简称:地形图)。“地形图”中各地理要素的相对位置,即使用现代科技水准来看,绘制得也是相当准确的。以其所描绘的实际面积来推算,此图的比例尺约为1:17万至1:18万(图的中心部分比较准确,周边地区比较粗糙)。地图史研究者在评论此图时说:“可以说长沙马王堆汉墓出土的‘地形图’是一幅接近现代绘制技术水平的大比例尺地形图,……可见当时测量技术之发达。”(卢良志:《中国地图学史》28,31页,测绘出版社,1984)“我们知道,潇水流域的地形是比较复杂的,因此测量地物的距离不能以人行的路线为准,需要求出水平直线距离才能准确。间接测算极高和极远,在西汉主张盖天说的学者已用‘重差法’……地形图的测绘已利用当时数学的光辉成就,所以精度比较高。”(中国科学院自然科学史所地理史组编:《中国古代地理学史》,15页,科学出版社,1984)根据与“地形图”同时出土的记有年号月日的木牒来推

断,“地形图”的绘制时间当不会晚于西汉文帝12年(前168年)。

另外,1986年在甘肃天水放马滩1号秦墓中又出土了时间早于马王堆汉墓的木板地图实物。这些图是绘制在4块长26.5—26.81厘米,宽15—18.1厘米的7幅地图(2幅行政图、3幅是地形图)。地图的绘制年代被推定为秦始皇8年(前238)。经过研究,地图所描绘的地区乃是战国晚期秦国属下的邽县,先当现代天水市秦城区、北道区、清水区、清安县,东部进入到陕西省宝鸡市,南部已进入两当县和徽县的边缘。7幅地图中有2幅是行政图,3幅是地形图,2幅是经济图。其中绘有居民点、乡里治所的位置,还有地形、地貌、河流走向、道路、关口等等,有的地方还注有各地之间的距离,和现在的水市地图相比,多有相合。尤其是以邽丘为中心,与周围个地点的距离,和现今里程大体相合。因此有人认为:晋代人裴秀总结绘制地图的“制图六体”(分率、准望、道里、高下、方斜、迂直)中“对照放马滩秦墓出土的木板地图,除没有明确的分率外,其他诸项皆已具备。而且经济图中所标明的历程,与现今里程多有符合,说明这些地图相当准确,是经实地测量后绘制的。”(何双全:《天水放马滩秦墓出土地图初探》,载《文物》1989年2月号。又见:周谷城等编:《中华文明史》第2卷,131、249—250页,河北教育出版社,1992)

出土地图实物证明,“句股”章中的一些算法,最迟不晚于战国时期,即已存在。

以上不过是两三例子而已,不过从中已可看出《九章》中的许多算法确实来自先秦时期。

《注 释》

- (1) 本文是在第22届国际科学史大会SC12分会(北京,2005-7-25)上所宣读论文基础上改写而成的。