

大学における幾何学初年度教育の現状と課題

教育学部 小林 雅子

抄 録

学生が大学で幾何学を学ぶにあたり、高校までのような、ユークリッド空間内の図形の問題を解くのではなく、ユークリッド空間の部分集合としての図形のとらえ方などを習得するため、集合の記号や不等号の表す領域等、それまで図形と関連しては意識していなかった対象物を再確認することになる。その際、大学の数学テキストでは往々にして当然のように用いられている数学記号や図形の表現方法が学生には定着しておらず、幾何の問題そのもの以前に表現方法の理解不足から問題解決に至らないことがしばしばある。

そこで本稿では幾何学初年度講義において学生に調査を行い、図形表現方法の定着がどの程度であるか考察する。

Key Words：大学幾何学教育，図形表現，ユークリッド幾何

1. はじめに

大学で幾何学，特に位相幾何学を講義するにあたり，対象学生が数学専攻でない場合，理工系学部の一般教養的な内容や，教員免許取得のために初歩的な内容を講義することが多い。この場合，対象学生は高校数学の最終学年分（数3）まで習得していないこともあり，また，計算問題を主に解いてきたためか，集合や論理の概念は乏しいことが多い。また解析学は高校で習得する微分積分の延長として捉えられ，代数学は式の計算やベクトルを用いた計算の延長として捉えられることが多いのに対して，大学の幾何学は高校までの数学とのつながりが薄く感じられる。高校までの数学で幾何学分野に相当するのはユークリッド幾何学の一分野としての

平面上の三角形やその重心等5心に関する話題にとどまるのに対して，大学での幾何学は微分幾何の初歩として平面内や空間内の曲線及び空間内の曲面を論じるか，位相幾何学の初歩として多様体の簡単な例を論じることが多い。そこでこの落差を埋めるべく，幾何学の初年度講義では論理や集合の記号の定義から始め，低い次元のユークリッド空間の部分集合を題材に例を示すことになる。

しかし，ここで，高校までで学習しているはずの図形の示し方が理解されておらず，教員側や大学テキストの示したいことが必ずしも学生に伝わっていないと感じることを経験している。そこで，大学数学のテキストや講義でよく見かける表記方法が学生に伝わっているかのアンケートを行い，その集計を考察するとともに

今後の課題を考える。

アンケートを行った集団は2グループある。Aグループは情報系学部2年生から4年生(有効回答44名)である。1年次に線形代数と微分積分の講義を必修で習得しており、「集合と位相」という科目名の講義を一般教養として履修しようとしている学生である。この学科で数学の中学・高校教員免許取得を目指している学生に対しては、この科目を履修することを推奨されている。Bグループは教育学部2年生から4年生(有効回答35名)である。基本的に中学・高校教員免許取得を目指しているが、必ずしも代数学や解析学を履修済みではない。

2. 1次元(数直線)の部分集合について

数直線は1次元ユークリッド空間とみなすことができるが、その部分集合は区間という名称で、主に不等式で表される領域を示しており、学生にとっては必ずしも部分集合という概念と結びついているようではない。そこで、数直線上の区間の表現について学生に確認した。

学生へのアンケート

数直線上の区間 $[1, 3]$ $(4, 5)$ を表すのにどれを使いますか。

a: 図 a, b: 図 b, c: 図 c, d: どれも使う
e: 違う表現をする(図を描いてください)

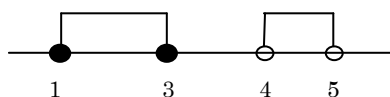


図 a



図 b

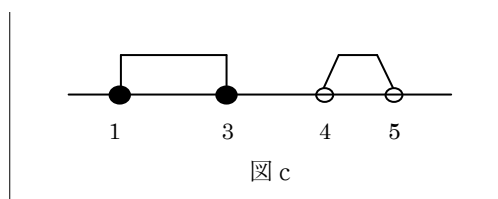


図 c

アンケート結果

| | a | b | c | d | e |
|-------|----|---|----|---|---|
| Aグループ | 13 | 1 | 23 | 7 | 0 |
| Bグループ | 8 | 0 | 25 | 1 | 1 |
| 合計 | 21 | 1 | 48 | 8 | 1 |

アンケート回答eの図

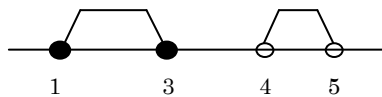


図 1

数直線は高校数学 I 「実数」で導入され、その後「不等式の解法」で区間の表し方を学ぶ。過去には図a, 図bの方法でも領域を表していたが、現在は図cの方法が高校の教科書で用いられているのでアンケート結果は妥当であろう。しかし、高校数学では連立不等式の答を求める方法として数直線上に区間を表しているのが、区間が1次元ユークリッド空間の部分集合である、という認識は乏しいと思われる。このことは、1次元ユークリッド空間の部分集合としての区間を表示せよ、と学生に指示した場合、図2のように各学生をよく見ることからわかる。

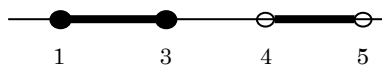


図 2

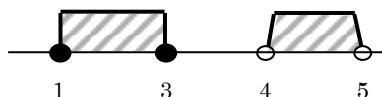


図 3

図2は、よりユークリッド空間の部分集合であることを意識していると思われる。図3のように示す学生も多い（斜線部は手書きにて斜線を入れる）が、実際には学生は斜線を引くことで、高校の教科書に記載の図4の記法を表そうとしていると思われる。

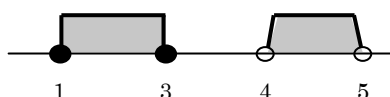


図4

図4での塗りつぶし部分は教科書が多色刷りの場合、黒ではない色で薄い色で塗られていることが多い。アンケートの図にも図4のような塗りつぶしがあったほうが学生にはより実感があつたのではないかとと思われる。

ここで問題は、図2のように考えるのが1次元ユークリッド空間の部分集合として妥当であることである。「複数の不等式の表す領域」を考えると図2のまま、重なる領域を書くことは単色では困難であり、図4を使って次の問のように表すことがより理解しやすいことは当然である。

例題：次の連立不等式を解きなさい

$$\begin{cases} x^2 > 9 & \dots\dots\dots \textcircled{1} \\ 2 \leq x \leq 5 & \dots\dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

答：

上の図より $3 < x \leq 5$

しかし、区間を点集合としてとらえたとき、例えば次のような問題に対する答案において、数直線及びその部分集合を1次元ととらえていないことが顕著にわかる。

問題：Rを実数全体とし、これを数直線で表す。またRの部分集合Aを $A = (2, 3)$ とする。
このとき、Aの補集合を図示しなさい。

答案1：Aの図は下左図になるので、Aの補集合は下右図

答案2：Aの図は下左図になるので、Aの補集合は下右図

答案1・2とも「補集合とは『Aで無いところ』』という認識で答えていると思われる。答案1は図2の方法で数直線とその部分集合を考えているので、正しく数直線上のAの補集合を示しているが、答案2ではそもそもAが実際には数直線上の部分集合である、という認識もないと思われる。しかし、数直線及び部分集合Aを2次元平面に埋め込んだ場合のAの補集合を示しているわけでもない。この間違いをする学生は後述の2次元ユークリッド空間を平面で表現する場合でも同様の間違いをするので、数直線で実数全体の集合を表すときに、その直線以外の空間は存在しない（考えない）ことを十分理解させることが必要と思われる。

3. xy-平面内の不等式の表す領域について

1次元空間の部分集合については、実際は不等号の表す範囲としてとらえているが、不等号が等号付きである「以上」「以下」であるか、等号付きでない「より大きい」「より小さい」

を重視しない学生をよく見かける。

このことは2次元ユークリッド空間，すなわちxy平面の部分集合における境界の表現により顕著になる。

大学幾何学の初年度カリキュラムで初めて部分集合の境界の定義を学ぶことになるが，高校までの教科書で不等式の表す領域として，xy平面の部分集合を扱っている。

このときの部分集合と境界線の表現方法について学生にアンケートを行った。

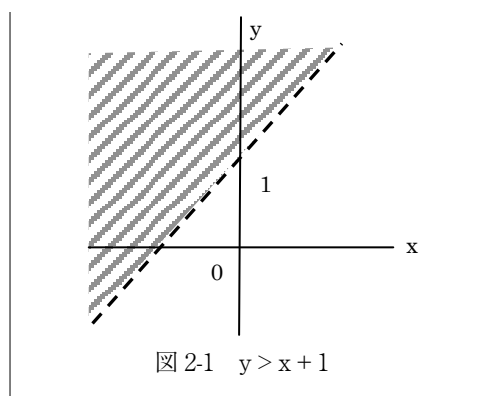


図 2-1 $y > x + 1$

学生へのアンケート

(2) 平面上の「不等号が表す領域」で境界を含むときは実線 (下図 2-1)，境界線を含まないときは点線 (下図 2-2) という書き方を知っていますか。

- a: 知っているし使う
- b: 知っているが使わない
- c: 知らない

(3) 平面上の「不等号が表す領域」で下図 2-1, 2-2 のように領域に斜線を入れることを知っていますか

- a: 知っているし使う
- b: 知っているが使わない
- c: 知らない

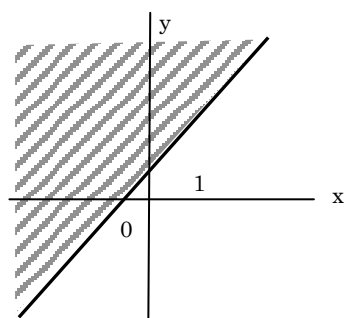


図 2-1 $y \geq x + 1$

アンケート結果

(2)

| | a | b | c |
|-------|----|----|----|
| Aグループ | 11 | 6 | 28 |
| Bグループ | 3 | 9 | 23 |
| 合計 | 14 | 15 | 51 |

(3)

| | a | b | c |
|-------|----|---|---|
| Aグループ | 32 | 5 | 7 |
| Bグループ | 32 | 1 | 2 |
| 合計 | 64 | 6 | 9 |

(2) の境界線の表現については多くの学生が知らないと答えている。高校までの教科書では等号付き不等号の場合も，等号のない不等号の場合も境界線は実線で書き，別途日本語で「ただし，境界線を含む」「ただし，境界線を含まない」等，明記することが主流のようである。実線・点線で書き分ける方法も以前は明確に教科書に記載されていた，というわけではないが，複数の不等式であらわされる領域を考えると各々の境界線についてこの文言を書かなければならず，視覚的にも明確ではないことが，不等式における等号付きかそうでないかを考える意識が薄らいでいる要因の一つであると思われる。境界線という言葉の定義がなされていないため，実際には「ただし，境界線を含む」という文が何を意味しているかを深く考えずに，記述だけをしているのではないか，と思われることもしばしばある。これは大学幾何学において境界の定義を学んだ後に実践的な問題において，線の形を成していない境界であるよ

うな 1 次元図形の境界や、3次元図形の境界についても同じ「境界線」という言葉を用いていることから推測される。

(3) の領域の表現については、(2) の境界線の表現よりは『知っている』学生が多い。高校の教科書では領域が黒ではない（グレーまたは薄青）色で彩色されているので、実際に自身で領域を描いたことが無く、教科書を見るだけの学生は「知らない」と答えている可能性がある。

しかし、実際に問題を与えた場合、1次不等式の表す領域を示す場合には領域に斜線をつけるが、それ以外の2次不等式等や円の方程式を不等式に変えた場合に斜線で領域を示さない学生は多い。1次不等式の場合のみに斜線をつけると理解しているとは思い難いので、平面上の部分集合の図を描く問題を十分に行っていないので、斜線を描く習慣がついていないものと思われる。

4. 平面・xyz空間における向き付けについて

xy平面にグラフや図を描くときにx軸・y軸を明記しない学生は多い。また、xyz軸は高校までの学習において、自身で描くことはあまり無いようであり、大学の数学の講義で改めて指導しなくてはならない事項である。また、xy平面上で直交座標ではなく極座標表示を用いるとき、正の方向を逆に記述した結果、計算問題等で計算は合っているのに解答が間違いである学生も見受けられる。そこで、xy平面、xyz空間の軸のあり方と向き付けについての理解をアンケートで問うた。

学生へのアンケート

(4) 平面上で「反時計回りが正の回転方向」を知っていますか

| | |
|--|----------|
| a : 知っている | b : 知らない |
| c : その他 () | |

(5) 空間内の3つのベクトルの「右手系・左手系」という言葉を知っていますか

| | |
|--|----------|
| a : 知っている | b : 知らない |
| c : その他 () | |

アンケート結果

(4)

| | a | b | c |
|-------|----|----|---|
| Aグループ | 26 | 18 | 0 |
| Bグループ | 18 | 18 | 0 |
| 合計 | 44 | 36 | 0 |

(5)

| | a | b | c |
|-------|----|----|---|
| Aグループ | 15 | 29 | 0 |
| Bグループ | 8 | 27 | 1 |
| 合計 | 23 | 56 | 1 |

(5) c : その他 の記述 : 右手系だけ知っている

(4) (5) とともにAグループの方が「知っている」の割合が多いのは、Aグループのアンケート対象の学生全てが1年次に科目「線形代数」を同じテキストで履修しており、そのテキストで「平面上の軸の変換」や「右手系」の記述があるからである。むしろ、履修済みであるにも関わらず「右手系」を知らない学生の方が多いことは、一過的に学んだだけでは定着しないことを示していると思われる。

(4) については、平面上のいわゆるxy軸については、通常水平右方向を正の方向としてx軸を描き、対してy軸は垂直に上を正の方向として描くことが定着しているので、線形代数で基底や軸の変換を学ぶまでは(4)の「反時計回りが正の方向」を知らない、と答えた学生もさほど不都合は起こらない。また、極座標を用いないのであれば、角度についても例えば多角形の内角等の話題では角度は0から 2π の範囲で用い、あえて正の方向を考える必要はない。

しかし、三角関数を学ぶ高校数学2において、角度に負の数や π 以上の実数も用いているので、正の方向であることを認識していないと問

題を考えることはできないはずである。図形を念頭に置かず単なる計算問題として三角関数をとらえている懸念がある。

(5) について、「右手系」という概念は高校では扱わないが、xyz空間の軸は教科書にも現れる。しかし、xy平面の座標軸ほどには統一された表記方法はなく、大学数学においても次の図のようなxyz軸を用いることがある。

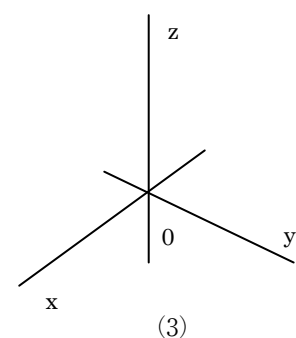
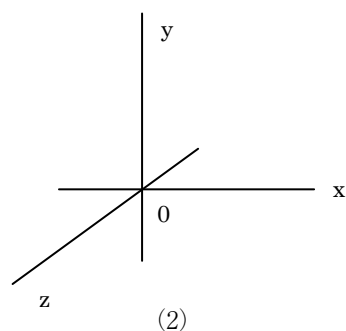
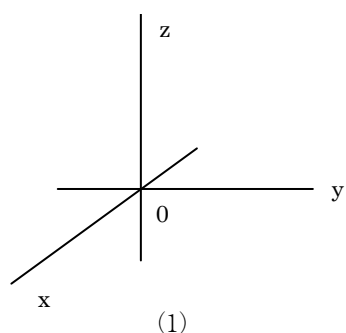


図5

図5の座標軸はいずれもxyzの記入された側が軸の正の方向であり、(1)(2)(3)とも右手系で描かれている。(1)は解析学系のテキストで使用されており、2変数関数のグラフを示す場合に有効である。また、(2)は幾何学系のテキストで使用されており、馴染みのある平面のxy座標にもう1次元軸を加えたと解釈することができる。しかし(1)のx軸および(2)のz軸が斜めに描かれているのは、他の軸とは直交していることを紙面上で表現していることで、そのことの暗黙の了解を理解することが必要になる。また、大学のテキストでは見かけないが、(3)の表現を高校の数学教科書で使用している場合がある。この図ではz軸が紙面という平面上にあり、x軸およびy軸は紙面に垂直な平面上にあることを理解しなければならない。さらに、x軸とy軸は直交しているため、これらの軸は紙面から45度手前に突き出ていると読み取る必要がある。これらの解釈の説明が高校の授業で十分なされていないのか、(3)の軸を平面上に3直線があり、各2本が120度の角度で交わっていると解釈している学生をよく見る。

図5のように見かけ上複数の座標軸の表現がある上に、右手系の概念を持たないまま座標軸を描こうとするので3次元ユークリッド空間の軸は適当な順でxyzの名称をつければよいと理解している学生が多く、例えば3次元空間で方程式・不等式で表された図形を描くことになると、左手系軸を用いて、見た目が鏡像であるような図を描いてしまう。大学数学の初期に現れる2変数関数を用いた体積計算の値や、3次正方行列の行列式の正負の意味も右手系軸を用いた図形の体積正負と一致しているため、右手系および、右手系直交軸の定着を図ることが必要である。

5. 空間の次元と空間の部分集合の次元について

一般社会でも「次元」という言葉はほぼ定着していると思われるが、2次元は平面、3次元は立体物を示す、と解釈されているようである。また、大学数学の初期に履修する線形代数で次元の概念は習得するはずであるが、一次独立・生成・基底など耳慣れない数学用語の直後に次元が定義されるので、線形代数においてはn次元ベクトル空間の部分空間の次元を計算で求めることはできても、実際の図形、例えばxyz空間内の原点を通る平面は2次元ベクトル空間である、ということあまり定着していないようである。

そこで、平面および空間内の図形について、それが何次元の図形であると思うか、をアンケートで問うた。

学生へのアンケート

問2 下の図は何次元の空間に、何次元の図形Aが描かれていると思いますか。思う数字を()に入れてください。

- (1) 図1について,
()次元空間で図Aは()次元
- (2) 図2について,
()次元空間で図Aは()次元
- (3) 図3について,
()次元空間で図Aは()次元
- (4) 図4について,
()次元空間で図Aは()次元
- (5) 図5について,
()次元空間で図Aは()次元

図1

$$A = \{ (x, y) \mid (x-3)^2 + (y-3)^2 \leq 1 \}$$

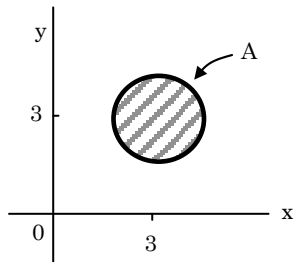


図2

$$A = \{ (x, y) \mid (x-3)^2 + (y-3)^2 = 1 \}$$

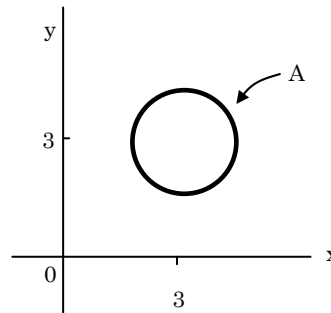


図3

$$A = \left\{ (x, y, z) \mid \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{array} \right\}$$

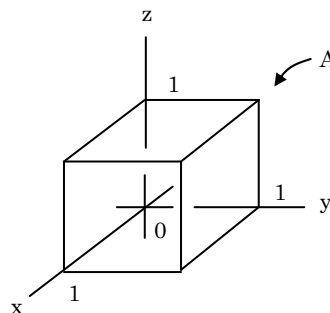


図4

$$A = \{(x, y, z) \mid z^2 = x^2 + y^2\}$$

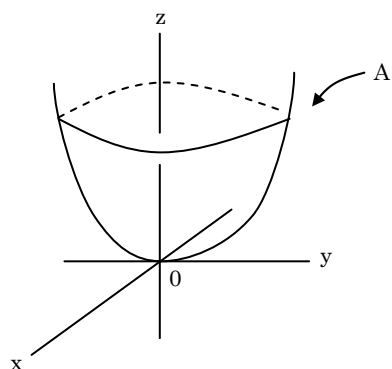
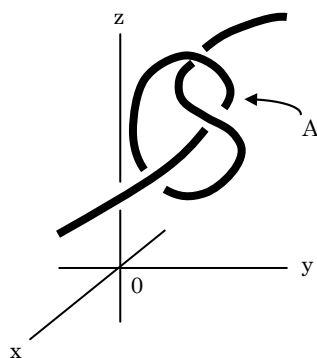


図5



アンケート結果

(1) 空間

| | 1 | 2 | 3 |
|--------|---|----|---|
| A グループ | 1 | 40 | 1 |
| B グループ | 0 | 35 | 0 |
| 合計 | 1 | 75 | 0 |

(2) 空間

| | 1 | 2 | 3 |
|--------|---|----|---|
| A グループ | 1 | 40 | 0 |
| B グループ | 0 | 35 | 0 |
| 合計 | 1 | 35 | 0 |

(3) 空間

| | 1 | 2 | 3 |
|--------|---|---|----|
| A グループ | 1 | 1 | 40 |
| B グループ | 0 | 0 | 35 |
| 合計 | 1 | 1 | 75 |

(4) 空間

| | 1 | 2 | 3 |
|--------|---|---|----|
| A グループ | 1 | 6 | 34 |
| B グループ | 0 | 3 | 32 |
| 合計 | 1 | 9 | 66 |

(5) 空間

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------|---|---|----|---|
| A グループ | 2 | 1 | 36 | 1 |
| B グループ | 0 | 0 | 31 | 2 |
| 合計 | 2 | 1 | 37 | 3 |

A

| | 1 | 2 | 3 |
|--------|---|----|---|
| A グループ | 3 | 37 | 0 |
| B グループ | 2 | 32 | 0 |
| 合計 | 5 | 69 | 0 |

A

| | 1 | 2 | 3 |
|--------|----|----|---|
| A グループ | 6 | 34 | 0 |
| B グループ | 7 | 28 | 0 |
| 合計 | 13 | 62 | 0 |

A

| | 1 | 2 | 3 |
|--------|---|---|----|
| A グループ | 1 | 1 | 38 |
| B グループ | 0 | 3 | 32 |
| 合計 | 1 | 4 | 70 |

A

| | 1 | 2 | 3 |
|--------|---|---|----|
| A グループ | 1 | 1 | 38 |
| B グループ | 0 | 1 | 33 |
| 合計 | 1 | 2 | 71 |

A

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------|----|---|----|----|
| A グループ | 6 | 4 | 24 | 5 |
| B グループ | 4 | 1 | 19 | 8 |
| 合計 | 10 | 5 | 43 | 13 |

どちらのグループも初年度の線形代数はほぼ全員が履修した後であるはずなので、空間の次元については正解してしかるべきである。にもかかわらず (1) (2) が2次元, (3) (4) (5) が3次元と答えられなかった学生がいるのは、線形代数で学ぶベクトル空間の次元と、ユークリッド空間の次元が結びついていないことが考えられる。標準基底を用いて2次元ベクトル空間が2次元, 3次元ベクトル空間が3次元になることは必ず学んでいるはずだが、特に3次元ベクトルがxyz空間内のベクトル(矢印)で表すことができる事を十分に理解し、実際的な問題として扱っていない可能性がある。

ユークリッド空間の部分集合Aの次元については位相幾何的な概念であるので、このアンケート対象にはまだその定義を学んだ学生はいないと思われる。数ベクトル空間の部分空間の次元が社会一般の「平面的なものが2次元」「立体的なものが3次元」という考え方でほぼ通用するのに対して、設問の部分集合Aは位相多様体であり、今後幾何学で位相多様体の講義をするにあたり、多様体の次元の概念がどの程度学生の思う次元の考え方と相違があるか計る設問であった。幾何学の一般的な次元の定義は以下のものである。

定義：n次元ユークリッド空間 R^n の部分集合Aについて、Aの任意の点aについて、aのある適当な近傍が R^m または $R^m_+ = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \mid x_i \in R (i=1, 2, \dots, m), x_m \geq 0\}$

(m, nは自然数)と同相になるとき、Aはm次元であるという。

これより、この設問において (1) 2次元 (1) 1次元 (3) 3次元 (4) 2次元 (5) 1次元が正解である。

(1) の円板を2次元と答えることは「平面的なものは2次元」という考えから容易であったと思われる。(2) の円周について、アンケート問1 (2) で領域を斜線で示すことを知ってい

る学生が多いことと、図形を示す不等式・等式を示していることから、図形自身を誤解している学生は少ないと思われる。にもかかわらず (2) を1次元と答える学生がさほど増えなかったのは、「線は1次元」という概念が乏しいからだと思われる。「2次元・3次元」が「平面的・立体的」という言葉の代わりに用いられるのに対して「1次元」が「線」という言葉の代わりに用いられることがあまり無いことにも関連すると思われる。線形代数において数ベクトル空間の1次元部分空間が原点を通る直線であることが十分に習得されていると、位相幾何において1次元多様体を学ぶ時点での導入に役立つと思われる。

(3) は立方体であり、いかにも「立体的」な図形であるので、正答である学生が多かった。それに対して (4) は2変数関数のグラフとしてもとらえることができるので、2変数関数や接平面についても習得しているはずのAグループのアンケート結果において2次元と答える学生が少ないことは、線形代数と解析学がそれぞれ別の科目として成立しており、学生にとっては関連付けがなされていないことがうかがえる。

(5) については示された図が大学初年度程度では現れない図形であるので、全体空間自身が3次元ではないのではないかと考えた回答が目立った。線形代数でベクトル空間の次元の概念としては4次元以上も知っているのだから、アンケートの性質から4次元の可能性を思ったのかもしれない。しかし、座標軸という概念が定着していれば、この図が4次元であると思う可能性は少ないはずである。

6. 空間図形の表記方法について

問2 (5) の図形Aについては方程式等でAを厳密に示しているのでもなく、意図する図形として学生に読み取られないことは想定されたの

で、問3として、どのような図形と考えて次元を答えたか、をあらためて問うた。

学生へのアンケート

問3 図5(問2で使った)の図形Aはどのような絵だと思いますか。自由に書いてください。

アンケート集計。ただし、自由記述であるので、分類は集計時に決めた。

| | A | B |
|--------------------------|--|--|
| 曲線ととらえた記述 | <ul style="list-style-type: none"> ・結んだひも ・結び目 ・線がからまっている ・紐の結び方の絵 ・ひも ・ひもを片結びした時の絵 ・両端をひっぱったらたま結びができる ・ひもの結びめ ・ひもを結んだような図形 ・糸を結んでいるような絵 ・紐の結びかけ ・1本でできた線 ・3次元空間上に描かれたひも状の図形の絵 ・ひもを結んでいる絵 ・紐状の図 | <ul style="list-style-type: none"> ・かたむすびをしているヒモの絵 ・曲線が3次元空間にある図 ・1本の線 ・1本の線が曲がっている図形 ・ひもを結ぶような絵 ・線 ・線の絵 ・曲線が3次元でからまっているような絵 ・結び目のようになっている ・曲線のはしを引っ張ると結び目ができるような図形 ・直線がヒモみたいにかからまっている絵 |
| 2次元的にとらえた記述 | <ul style="list-style-type: none"> ・平面の円 | <ul style="list-style-type: none"> ・だ円・メビウスリングのように線をはなさずゆがみをほどこいても二次元の円とならないような図形 |
| 3次元的にとらえた記述 | <ul style="list-style-type: none"> ・枝豆 ・3次元のパンのきじみみたいなものをねじっているイメージ ・なすび ・蚕虫を横からつぶした図 ・3次元のたてに長い球をおりまげたような絵 ・1本の線が貫通している ・やわからかそう ・まめ ・円柱 | <ul style="list-style-type: none"> ・ソラマメ ・豆みたいな図 ・まが玉 ・豆 ・そら豆が干されています ・3次元で表されている図形を直線が貫通している絵 ・まが玉 |
| xyz軸に準じた軸がある(4次元)ととらえた記述 | <ul style="list-style-type: none"> ・何かよくわからない軸が増えているようにみえる ・wを含む4元の関数 | <ul style="list-style-type: none"> ・線によってもう1次元足されている |
| その他 | <ul style="list-style-type: none"> ・得体の知れない物体 ・わかりません(3名) ・全単射の図形 ・ねじれ ・座標上の点の集まり ・3次元空間の図 ・積分を使った絵 ・xyz軸の3次関数 ・意味不明 | <ul style="list-style-type: none"> ・分からない(6名) ・単連結でない ・曲線を移動したときの跡 ・不変の図 ・ブラックホール ・点の集まり ・Aの移動 |

| | 1次元 | 2次元 | 3次元 | 4次元 | その他 |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|
| Aグループ | 15 | 1 | 9 | 2 | 11 |
| Bグループ | 11 | 2 | 7 | 1 | 7 |
| 計 | 26 | 3 | 16 | 3 | 18 |

幾何学では空間図形を表すとき、紙面の上からの射影を考えると多重点となる点がある場合は紙面に垂直な座標に関して紙面に近い方の図形を途切れているように描くのが一般的である。問2図4においてz座標が途切れているのはその表現方法である。問2図4に違和感がないのであれば図5も一つの曲線が描かれていると理解されてしかるべきであり、1次元の1つの曲線が「結び目」のようになっている、が正解である。しかし、アンケートでは問2で何次元の図形であると答えたかは別として、一つの曲線である、と理解した学生は全体の1/4程度にとどまる。小学校から高校までの数学の教科書に多面体など立体図形は登場するものの、それは印刷されたものを見るものであって、生徒自身が描くものではないので上記のルールを指導されたこともなく、実際に図形を描くとなると戸惑う学生が多い。さらに高校数学で現れる空間内の図形は少なくとも辺が直線でできたような図形であるので、直線でない曲線を空間内に描くことは大学数学でも幾何学で初めて起こることのようである。

7. まとめ

大学数学においては当然のことであるような、平面の直交軸や空間の右手系直交軸、また、空間内図形の表記方法などは、数学の本質的なことではないので、ともすれば何の解説もなく講義が行われていくと思われるが、学生との意思疎通の方法として、注意深く説明する必要がある。特に平面の正の方向や空間内の右手系については、本来高校までの数学でも用いられている事項であるにもかかわらず、特に説明

のされないまま描かれたものを眺めているという状況にあることが推測される。実際3次元空間の図形については描かれている図形を読み取ることにはできるが、学生が描くことになると、空間内の1点の座標を示すために用いる、原点とその1点を対頂点とする直方体でさえ描くことが困難な学生が多くいる。大学幾何学においては、3次元空間やその空間内の曲面としての2次元の図形、低次元位相空間の結び目理論で用いる結び目・絡み目の図形など、その表記方法に一定のルールを用いることが多いが、それ以前に高校数学までであらわれる2次元平面上の図形、不等式であらわされる領域などの表記方法のルールを周知させることが初年度教育において重要な課題であることが分かった。

また、次元の概念については、線形代数等で次元の概念は習得していても、それを実際の図形に関連するものとしてとらえてはいないことがわかったので、幾何学分野における次元の定義はベクトル空間の次元と関連つけて、定着させる必要があることが分かった。

佛教大学教育学部学会紀要 第17号 (2018年3月)