フィンランドの中学校教科書にみる関数学習についての検討

教育学科　二　澤　善　紀

抄　録

フィンランドの数学教育における課題，数学科教員の役割に関して，日本と類似するところがある。そこで，本稿ではフィンランドの教科書の構成と日本で課題指摘が続く関数の扱いを分析することを目的とする。その結果，フィンランドの教科書は数学的内容の記述は簡潔であること，考察の対象として現実事象が多く取り入れられていること，関数の扱いは各節がスモールステップで徐々に内容が高めるようになっていること等が得られた。

Key Words：フィンランド，関数，表，式，グラフ，現実事象，スモールステップ

1　はじめに

フィンランドは2000年以降，教育における主要な国際的リーダーと見なされている（経済協力開発機構, 2012）。また, Hemmi et al.(2018)によるとPISA（読解，科学，数学）において優れた結果を出している一方で，数学教育に関する課題として，生徒の数学の知識とスキルが低下していること，また生徒が数学学習に対して否定的であることが指摘されている。

フィンランドには，日本の学習指導要領にあたるNational Core Curriculumがある。フィンランドの小学校，中学校の教育はNational Core Curriculum for Basic Education 2014（Finnish National Agency for Education, 2016）に基づいて行われており，学習への動機づけとして学ぶ喜びや学ぶ楽しさが強調されている。また，数学科教員の役割は，生徒に単に数学を説明することではなく，生徒の個人活動やグループ活動を指導することが示されている（Hemmi et al., 2018）。以上のように，フィンランドの数学教育における課題や数学科教員の役割に関し，昨今の日本と類似するところがある。

フィンランドの数学教育に関し，例えば熊倉(2013）の先行研究があるが，関数等の特定の内容に着目し，フィンランドの教科書における扱いを示したものはない。そこで，フィンランドの教科書の構成と，日本で以前から課題指摘が続く関数に着目して（二澤，2020），フィンランドの教科書における関数の記述内容や系統を分析することを目的とする。

2　National Core Curriculum for Basic Education と教科書

本節では，National Core Curriculum for Basic Education 2014（Finnish National Agency for Education, 2016）の関数に関連する内容，及び中学校で使用されている数学の教科書の概要

を述べる。

2-1　National Core Curriculum for Basic Education

フィンランドでは，小学校と中学校を Basic Education と位置付け，日本の学習指導要領に対応する National Core Curriculum for Basic Education がある。これは，約 10 年ごとに改訂されており，現行のものは，2014 年に告示，2016 年より実施されている。小学校と中学校のものが 1 つにまとめられている点に特徴がある。また，取り扱う内容は非常に簡潔に示されている。例えば関数に関係する内容は，関数関係は式とグラフで表されること，比例と反比例，関数概念を理解すること，座標平面に直線や放物線をかくこと，直線の傾きと定数項を学ぶこと，関数の増減を調べることを通してグラフを解釈すること，関数のゼロ点を求めること等が示されている（図 1）。

2-2　フィンランドの中学校数学科教科書の概要

本稿で用いる中学校数学科の教科書は，Jyväskylä 大学の Markus 氏から紹介されたもので 4 冊ある。その内，関数に関する内容を扱っている次の 2 冊である。

（1）書名：*Pii 8 matematiikka*

著者：Martti H., Markus L., Leena M., Kati R., Timo T., Tommi T., & Timo U.

出版社：Otava

ページ数：312

発行：2022 年

言語：フィンランド語

（2）書名：*Pii 9 matematiikka*

著者：Martti H., Markus L., Leena M., Kati R., Timo T., Tommi T., & Timo U.

出版社：Otava

ページ数：311

発行：2021 年

言語：フィンランド語

上記の 2 冊はそれぞれ第 2 学年，第 3 学年で使用されるものである。第 1 学年では *Pii 8 matematiikka* が使用される。また *Pii π matematiikka* は，各学年の単位数に応じて，複数の学年に分割して使用される。

［注意］

フィンランドの教科書を日本語に翻訳する際，各章や各節の見出し，記述内容が把握しにくい場合は，文部科学省（2018ab），清水他（2021abc），岡本他（2021abc）の章や節の見出し，また節の内容を参考に記述している。

2-3　章の構成

第 2 学年の教科書は 312 ページあり，日本の第 2 学年の教科書（例えば，岡本他（2021b）は 205 ページ）と比較すると，約 1.5 倍のページ数である。教科書の章は「1 図形と面積」（pp.6-111），「2 割合と累乗」（pp.112-201），「3 関数と方程式」（pp.202-296）となっている。

第 3 学年の教科書は 311 ページあり，日本の第 3 学年の教科書（例えば，岡本他（2021c）は 237 ページ）と比較すると約 1.3 倍のページ数である。教科書の章は「1 多項式と連立方程式」（pp.6-95），「2 空間図形」（pp.96-197），「3 復習」（pp.198-295）となっている。

なお，第 1 学年の教科書は 312 ページであり，日本の第 1 学年の教科書（例えば，岡本他（2021a）は 263 ページ）と比較すると約 1.2 倍のページ数である。教科書の章は「1 数と計算」（pp.6-101），「2 数から文字へ」（pp.102-191），「3 平面図形」（pp.192-297）である。

2-4　節の構成

各節は，2 ページまたは 4 ページのように偶数ページが基本になっている。

はじめに，用語の定義や数学的内容（学習内

容）が簡潔に説明されている。

次に，Esimerkki（例）が示されており，1つの数学的な内容に関して1，2問程度ある。節により4問程度ある。

さらに，例に関連したharjoitustehtävä（演習問題）が掲載されており，その数は15問前後となっている。演習問題は,3段階（無印,★,★★）で難易度が示されている。

最後に,演習問題に対応するkotitehtävät（宿題）が掲載されており，その数は5問前後である。

また，発展的な内容はEKSTRA（追加）として掲載されているが，すべての節にあるわけではない。

2-5　節における教科書の記述

例えば「6 関数」の具体的な構成内容は次のようになっている（図2，3)。

数学的な内容の説明：

関数の定義の説明が手短になされる。

関数の定義に関する例の提示：

例1　関数の規則が文章で示され，関数値を実際に計算する。

例2　例1と同様の例で，関数の規則が異なる。

演習問題：

1（無印）関数の規則が文で示され，関数値を求める。2から4まで同様。

5（無印）数値の対応関係が図で示され，関数の規則を説明する。6も同様。

7（★）数値の対応関係が図で示され，関数の規則を説明する。

8（★）関数の規則が文で示され，関数値を求める。9も同様。

10（★）関数の規則を説明し，表の空欄に適する数を求める（変数，関数値を求める)。

11（★）関数値から変数の値を求める。

12（★）関数の規則が文で示され，関数値を求める。13も同様だが，★は2つ。

14（★★）パターンの数と棒の数の対応関係を求める。15も同様。

設問1から6は,例1,2と同様の問題である。★が1つの問題は，関数の規則がやや複雑になっている。★が2つの問題は，示された図から関数の規則を求めるようなもので，図で示された事象から数値を抽出することで関数の規則を見出すものである。

宿題の問題：

全6問で，設問16-21は演習問題の無印，★1つ程度の問題となっている。

EKSTRA（追加)：

パズル的要素のある演習問題が5問ある。

2-6　第2学年の「3 関数と方程式」の構成

この章は，26の節からなる（図4)。第13節と第26節は学習内容を振り返る復習の問題が扱われていることから，実質的に24の内容に分けられている。そのうち，数量の依存関係，割合，比例，反比例は，日本では小学校算数科で学習する内容であるが，フィンランドでは中学校第2学年で扱われている。

2-7　第3学年の「1　多項式と連立方程式」の構成

この章は，26の節からなる（図5)。関数に関連する内容を扱う節は4つあり「19 グラフによる連立方程式の解法」「20 代入法で連立方程式を解く」「24 連立方程式の様々な解法」「25 問題の解決」である。主に連立方程式の解き方に関連して，関数のグラフを利用している。

3　教科書における関数の内容

第2，3学年の教科書で取り扱う内容について，その概要を示す。

3-1　第2学年の関数に関する内容

関数を扱う章である「3 関数と方程式」の各

節の概要を示す。

1 数量の対応関係：

数量の対応関係を数式で表すことを扱う。

本節で例として示される問題として「物品の単価が与えられ，複数個の価格を求める」のようなものがある（図 6）。演習問題では，2 つの数量の対応関係が等式で与えられ，一方の値に対する他方の値を求めるものがある（図 7）。

2 比率：

次節以降で比例と反比例を扱うために，比例式を扱う。

本節で例として示される問題として「単価と全体の価格の比は，個数の単位である 1 と全体の個数の比に等しいことを確かめる」「比例式が未知の数量を含む場合は文字 x を用いて表し，x を求める（図 8)」のようなものがある。演習問題では, 比例式の一部が□や x で表され, □や x に適する値を求めるものがある。

3 比例：

比は単位量あたりの大きさであることに基づき，比例を扱う。

本節で例として示される問題として「異なる単位の量の比率を求め，この比率は単位量あたりの大きさであることを確かめる（図 9)」「比例する 2 つの量の変化を表で与え，比例することを確かめる」「比例する 2 つの量を表で与え，未知の値を文字 x で表し，比例式を用いて求める」のようなものがある。表は横長でなく，縦長になっている（図 10)。

4 反比例：

前節の比例と同様の扱いである。

5 比例関係の計算：

すべて現実事象を対象として，比例と反比例を扱っている。

本節で例として示される問題として「実際の川の長さと地図上の川の長さが与えられ，地図上の湖の幅から実際の幅を求める」「ある 2 地点の自転車の平均速度と所要時間が与えられ，歩行の平均速度から同じ 2 地点の移動時間を求める」のようなものがある。未知の値を求める際には，比例式を用いている。

6 関数：

2-5 で述べたように，関数の定義が与えられ，その考えを扱っている。関数の規則が文章で示されている，あるいは文章で説明する問題が複数ある。

7 グラフと表：

関数関係は，グラフまたは表を用いて表されることを扱う。

本節で例として示される問題として「水を加熱したときの時間と水温の関係を表すグラフが与えられ，経過時間から水温，水温から経過時間を読み取る」「ガムの質量と価格の関係を表の値をもとにグラフに表す」のようなものがあり，グラフから値を読み取る問題がある。ただし，水温の例はグラフの一部が曲線で（図 11), 他の問題のグラフは曲線のものがある（図 12)。

8 グラフの解釈：

関数のグラフから，関数の特徴（ゼロ点，最大最小）を読み取ることを扱う。

本節で例として示される問題として「グラフで与えられた現実事象の変化に対し，関数値が 0 になるゼロ点，関数の最大値，最小値を求める（図 13)」「変数の値の増加に対応した関数値の増減，及びグラフの形状を確かめる」のように, 事象の変化の特徴をグラフから読み取る, また関数値の増減に対するグラフの形状を読み取るものがある。問題中に示されるグラフは曲線であり，関数を表す式の扱いはない。

9 関数の値の計算：

関数記号 $f(x)$ が与えられ，関数は x を用いた式で表されることを扱う。

本節で例として示される問題として「関数規則が文で与えられ，$f(x)=$（x の式）で表す（図 14)」「関数 $f(x)$ が式で与えられ，関数値を求

める」のようなものがある。

10 xy 座標における関数のグラフ：

関数のグラフをかくために xy 座標が与えられ，関数は $f(x)$=（x の式）だけでなく y=（x の式）とも表すこと，関数のグラフを xy 座標に表し，ゼロ点，最大値，最小値やグラフの形状の読み取りを扱う。ただし，座標平面の点は (x, y) で表すことや x 座標，y 座標という用語は扱っていない。

本節で例として示される問題として「関数 y=（x の式）は表とグラフで表されることを確かめる（図 15）」「グラフから関数値を読み取る，関数値から変数 x の値を求める，ゼロ点を求める」のようなものがある。問題中に示されるグラフは，直線あるいは区間ごとに異なる直線であり（図 16），発展問題を扱う追加の問題以外は関数を表す式の扱いはない。

11 変数の値の決定：

関数の規則を表す式が示されている場合，関数の値を与えると方程式を解くことで変数 x の値が求められることを扱う。

本節で例として示される問題として「関数を定義する式（x の式のみ）が与えられ，関数値から変数 x の値を求める」「関数 $f(x)$=（x の式）が与えられ，ゼロ点を求める」のようなものがある。演習問題の（★★）では，2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の関数値が等しくなるように変数 x の値を求めるものがある（図 17）。

12 主要な方程式：

数式は数量間の依存（対応）関係を示し，公式等のように特定の数量間で成立する方程式がある。また，現実問題を解決するときに方程式を解く必要があることを扱う。この節で扱う問題は，現実事象が対象である。

本節で例として示される問題として「平均速度 v は，距離 s を時間 t で割ることで $v=\frac{s}{t}$ が得られ，v の値を求める」「波の速度 v は周波数 f と波長 λ によって $v=f\lambda$ と表されることから，λ を求める（図 18）」のようなものがある。

13 復習問題：

1 から 12 までの内容を振り返るように，各節の基本問題を 1，2 問ずつ扱っている。

14 2 つの変数の方程式：

x, y に関する 1 次方程式の解は数値の組 (x, y) となり，座標平面に表されることを扱う。また，座標平面の点は (x, y) で表すことや x 座標，y 座標という用語を扱う。

本節で例として示される問題として「x, y に関する 1 次方程式を満たす 3 組の解 (x, y) を求め，xy 平面上に点をプロットする」「x, y に関する 1 次方程式の 4 つの解を求め，座標平面に点をプロットすることで一直線上に解があることを確かめる（図 19）」のような問題がある。演習問題では，与えられた 3 点を満たす方程式があるか否かを問う問題がある。

15 直線のグラフ：

グラフが直線になる関数は 1 次関数（線形関数）と呼ばれること，1 次関数の式を方程式とみなすと無限に多くの解があり，そのすべてが一直線上にあること，したがって座標平面における 1 次関数のグラフは直線になることを扱う。

本節で例として示される問題として「x, y に関する 1 次方程式を満たす点を複数プロットし，それらの点を結ぶことでグラフをかく（図 20）」「同じ xy 平面上に 2 直線をかき，交点の座標を求める」のように，1 次関数のグラフの性質とグラフの共有点の座標をグラフから求めるものがある。この節では，連立方程式を代数的に解くことはない。

16 直線上の点：

直線（1 次関数のグラフ）のゼロ点は，直線と x 軸の共有点の x 座標であること，グラフをかく，または計算でゼロ点を求めることを扱う。

本節で例として示される問題として「1 次関数のグラフをかいて，ゼロ点を読み取る」「ゼ

ロ点を求める方法として，x, y に関する1次方程式で y=0として解く方法，グラフからゼロ点を読み取る方法の2通りで求める（図21）」「点が直線上の点であるか否かについて，関数を表す式に代入して成立することを確かめることで判断する」のようなものがある。演習問題では，2直線上の共有点の座標を求める問題（★★）がある。ここでは，座標の値は整数だけである。

17 直線の傾き：

直線の傾きは，x の値が1増加するときの y の値の増加量で求められること，傾きが正の場合のときグラフは右上がりで，負のときは右下がりになることを扱う。

本節で例として示される問題として「表とグラフから直線の傾きを求める（図22）」「直線が通る2点の座標から傾きを求める（x の値の増加量と y の値の増加量の比を用いる）」のようなものがある。

18 直線の位置と定数項の関係：

直線 $y=kx+b$ の定数項は，直線と y 軸との共有点の y 座標を表すこと，特に原点を通る場合は $y=kx$ と表されることを扱う。

本節で例として示される問題として「方程式が示された直線を座標平面にかき，直線の傾きと y 軸との共有点の y 座標を求める（図23）」のようなものがある。

19 直線の方程式の決定：

直線の傾きと方程式の定数項がわかると直線の方程式が決定でき，直線の傾きと定数項からグラフにかくことができることを扱う。

本節で例として示される問題として「直線のグラフから直線の傾きと方程式の定数項を求め，直線の方程式を決定する」「直線の傾きと直線上の点の座標から直線の方程式を決定する（図24）」のようなものがある。追加の問題では，直線上の2点の座標が与えられ，直線の方程式を決定する（図25）ものがある。

20 いろいろな直線：

直線の傾きがゼロ以外の場合，直線は右上がりまたは右下がりになるが，直線には垂直または水平になるものがあること，直線の傾きが等しい2直線は平行であることを扱う。

本節で例として示される問題として「座標平面に点をプロットして x 軸に平行，あるいは垂直な直線がかけることを確認する」「直線の方程式から x 軸に平行，あるいは x 軸に垂直（y 軸に平行）なグラフをかく（図26）」「平行な直線と，直線の方程式の定数項を求める（図27）」のようなものがある。

21 直線の利用：

表は用いずに，x, y に関する1次方程式から直線の傾きと y 軸との共有点の座標を読み取り，グラフをかく方法について扱う。

本節で例として示される問題として「与えられた直線の方程式から直線の傾きと y 軸との共有点の座標を読み取り，グラフをかく（図28）」「与えられた1次関数のグラフと2つの座標軸で囲まれた三角形の面積を求める」のようなものがある。この段階ではグラフをかく際，常に方眼がかかれた座標平面を用いる。

22 不等式：

不等号の記号の意味，簡単な1次不等式を解くことを扱う。関数に関わる内容の扱いはない。

23 不等式の解法：

1次不等式を代数的に解く（式変形をすることで解く）ことを扱う。この節は基本的に関数に関連する内容の扱いはないが，EKSTRA（追加）ではグラフを利用して1次不等式を解くことを扱う。それは，直線のゼロ点を求め，y の値が正か負であるような x の値の範囲をグラフから読み取るものである（図29）。

24 2次方程式：

2次方程式 $x^2=k$ を与え，これを満たす x の値を有理数の範囲で求めることを扱う。関数に直接関連する内容の扱いはない。

25 2次方程式の解法と平方根：

2次方程式を解く際に平方根を利用することを扱う。本節で関数に関連する例として，放物線と x 軸との共有点の x 座標（ゼロ点）が2次方程式の解に対応することを確かめるものがある（図30）。演習問題や宿題の問題では，関数に関連する問題はない。

26 復習問題：

14から25までの内容を振り返るように，各節の基本問題を1，2問ずつ扱っている。

3-2　第3学年の関数に関する内容

関数に関連する内容は「1 多項式と連立方程式」の4つの節「19 グラフによる連立方程式の解法」「20 代入法で連立方程式を解く」「24 連立方程式の様々な解法」「25 現実問題の解決」で扱う。関数に関連する内容を扱う4つの節について，概要を示す。

19 グラフによる連立方程式の解法：

グラフを利用すると連立方程式の解を求めることができることを扱う。

本節で例として示される問題として「連立方程式の解は，それぞれの直線の共有点に一致することを確かめ，グラフの共有点を読み取り解を求める（図31）」「2つの x, y の1次方程式が表すグラフが平行になるとき，連立方程式の解は存在しないこと，また2つの方程式が表す直線が同一のときは直線上のすべての点が解であることを確かめる」のようなものがある。ただし，グラフを利用して共有点の座標を求める問題は，共有点の座標が整数に限定されており，方眼がかかれた座標平面にグラフをかくことで連立方程式の解を求めている。演習問題にある（★★）の問題では，「連立方程式 $\begin{cases} y = 2x + b \\ y = kx + 1 \end{cases}$ が解を1つもつ，解をもたない，無数にもつ場合の b と k の値をそれぞれ考察する」のようなものがある。

20 代入法で連立方程式を解く：

連立方程式の解は，計算で正確に求めることができることを扱う。関数に関連する問題として，演習問題に「グラフから連立方程式を作成し，2直線の共有点の座標を求める（図32）」のようなものがある。

24 連立方程式の様々な解法：

連立方程式の解に関し，グラフの共有点の座標から解の近似値を求めることができること，計算で正確に求めることができることの2つを扱う。

本節で例として示される問題として「連立方程式の解を2直線の共有点の座標をグラフから近似値で求める，代入法で正確に求める（図33）」のようなものがある。EKSTRA（追加）では「連立方程式 $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 4 \end{cases}$ をグラフの利用と代入法の2通りで解を求める」のような問題がある。

25 現実問題の解決：

現実事象を対象とする問題で，連方程式を用いて解決するようなものを扱っている。

本節で例として示される問題として，連立方程式を計算で解くことができる問題であっても，グラフ（2直線）をかいて問題場面と解について詳しく考察している（図34）。演習問題でも，問題場面にグラフが示されているものが複数ある。

4　教科書の構成と関数の扱いに関する考察

教科書の構成について述べる。

3つの章に分けられており，1つの章は26の節から構成されている。各節では，最初に節で扱う数学的な内容と重要事項が端的に示されており，示されている数学的内容に関する例が1，2問示される。1つの節では最大4問程度の例がある。また演習問題がレベル別に15問程度掲載されている。フィンランドの中学校における授業のフレームワーク（授業の進め方）は「(1) 前時の復習，(2) 本時の内容説明，(3) 問題演

習（個人解決)」が一般的である（二澤，2023）ことから，授業における「(2) 本時の内容説明，(3) 問題演習」で用いる話題や方法は，担当する数学科教員に委ねられていると考えられる。

関数に関する教科書の記述内容について述べる。

第２学年の「3　関数と方程式」の章では，前半で，まず現実問題を対象として関数の考えを扱い，次に数学的に関数を扱う，最後に学習した内容を現実問題の解決に生かすというサイクルになっている。後半は直線の方程式とグラフの関係を数学的に扱っている。第３学年の「1　多項式と方程式」の章の一部で，関数に関連する内容が扱われている。数学的に連立方程式の学習（解の求め方と解の意味）の中で関数のグラフが利用され，次に現実事象の問題解決に連立方程式を生かすようになっている。全体的に現実事象を考察対象としていることが比較的多い。

関数の基本的な内容である関数の定義，グラフ，表，式及び１次関数と２次関数 $y=ax^2$ のグラフが第２学年で扱われている。２次関数のグラフは，２次方程式の解を求める際に利用されている。第３学年では関数を対象に扱うというより，連立方程式の解の求め方を考察する過程で関数のグラフを利用することが主で，２つの１次関数のグラフの共有点が連立方程式の解に対応することを扱っている。特に第２学年の例と問題の特徴として，例えば関数の規則を文で与え，それを式で表す，表から関数の規則を見出して文で説明するようなものがあることである。

次に関数の学習内容の系統について，述べる。

第２学年は，主に現実事象を対象に「２つの数量の対応関係⇒比例，反比例⇒関数の定義⇒グラフ・グラフの解釈」(ただし，関数の定義は，現実事象を対象としていない）の順に扱い，次に数学の世界で「関数記号 $f(x)$ の導入⇒ xy 座標における関数のグラフ⇒直線のグラフ・直線上の点⇒直線の傾き・定数項⇒直線の方程式の決定⇒いろいろなグラフ⇒１次関数のグラフのかき方⇒不等式の解と関数のグラフとの関係⇒２次方程式の解とグラフ」の順となっている。

第３学年における学習内容の系統は，数学的に連立方程式とグラフの関係を扱い，さらに現実事象を対象とした問題の解決場面で，連立方程式とグラフを用いる内容の扱いである。連立方程式から解を求める方法は，まず２つのグラフの共有点を座標平面から読み取る，次に計算により求める，という順に扱われていることがわかる。

このことから，関数の基本的な考えの扱いは主に第２学年で，第３学年は連立方程式を解くことにグラフを利用しているといえる。

関数の式，表，グラフの扱いを述べる。

関数の式表示である「$y=$（x の式)」と「$f(x)=$（x の式)」は，第２学年の「6 関数」で関数の定義を与えるが「9 関数の値の計算」で関数記号 $f(x)$ を導入するまで扱わない。したがって，関数の式表示は，まず「$f(x)=$(x の式)」が導入され，次に「$y=$(x の式)」が導入される。

表の扱いは，関数を表す方法の一つとして説明がなされていること，表は縦長の形式であること，グラフをかく目的で示されること，与えられたグラフから関数の値を読み表に整理すること，直線の傾きを求める際にも表を用いているといえる。ただし，変数の値は整数に限られている。

グラフは関数の定義が与えられた後，現実事象を対象として与えられること，関数の式表示以前は直線だけでなく曲線も複数扱われていること，関数を式表示する前に，関数のゼロ点や最大最小はグラフから読み取る学習になっていること，これらの学習の後にグラフを xy 座標に表す，グラフの扱いは前半では直線と曲線になる場合を与え，後半で１次関数のグラフ（直

線）をかくような扱いであること，1次関数のグラフをかくことを目標とする節では方程式を満たす整数値のペア（x, y）を座標平面にプロットし一直線上に並ぶことを扱う，次の節で方程式を満たすようなすべての点は一直線上にあることを確認した後，グラフを直線としてかくことを扱う，グラフは曲線になる例が多く扱われていることが特徴である。

教科書に記述されている内容から，1つの節で扱う数学的内容は限定されていることがわかる。例えば，関数の式表示は関数の定義を与えても，すぐに「$f(x)$=（xの式）」や「y=（xの式）」のように式表示するわけではない。

また，関数を表す方法として，表，式，グラフが示されるが，教科書を見る限り日本のように表，式，グラフの三者関係が強調されている記述はない（図35）。

以上のことから，分析したフィンランドの教科書は，数学的な記述は最小限であり，現実事象を考察対象にしている例や問題が多いこと，現実事象を対象とした問題解決に主がおかれていること，関数の学習内容の系統は，各節の内容が焦点化されておりスモールステップで徐々に内容を高めていく構成になっていること，関数の扱いは第2学年が基本になっていることがわかる。実際の授業を行う数学科教員にとって，生徒の実態に応じた授業が組み立てやすい教科書であることが示唆される。

5　まとめ

本稿では数学教育の状況において日本と類似するところがあるフィンランドの数学教育に着目し，その教科書から関数の扱いを整理した。

本稿で用いたフィンランドの教科書は，各節が見開き2ページまたは4ページで完結するようになっており，簡潔に記述された数学的な内容に続き，例，演習問題，宿題の問題，さらに節によって追加の発展的な問題が続く構成になっている。

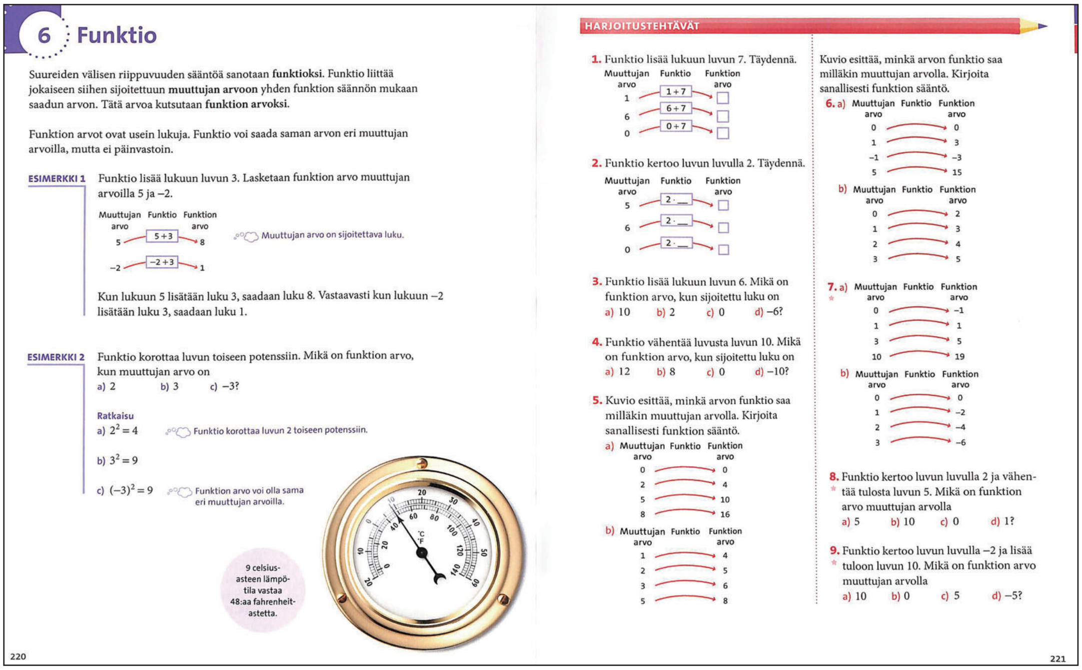
関数の扱いは，各節がスモールステップで徐々に内容が高めるようになっている点に特徴がある。特に関数の式表示とグラフの扱いに，その傾向が強い。またグラフは曲線が多く取り入れられている。さらに，考察の対象として現実事象が比較的多く取り入れられている。関数の表，式，グラフの関係については，日本ほど強調されていない。

実際に授業を行う教員にとって，授業方法や内容の自由度の大きい教科書であると考えられる。

今後は，関数の学習内容と系統性について，日本のものと比較検討することを通して，日本の関数学習の特徴や課題を見いだしていきたい。また，他の学習内容にも同様に取り組みたい。

Functions: Correlations are depicted both graphically and algebraically. The pupils familiarise themselves with direct and inverse proportionality. They get acquainted with the concept of the function. The pupils draw straight lines and parabolas in the coordinate system. They learn the concepts of the angular coefficient and the constant term. They interpret graphs, for example by examining the increase and decrease of a function. They determine the null points of functions.

図1　関数に関する記述内容（Finnish National Agency for Education，2016）


6 Funktio

Suureiden välisen riippuvuuden sääntöä sanotaan **funktioksi**. Funktio liittää jokaiseen siihen sijoitettuun **muuttujan arvoon** yhden funktion säännön mukaan saadun arvon. Tätä arvoa kutsutaan **funktion arvoksi**.

Funktion arvot ovat usein lukuja. Funktio voi saada saman arvon eri muuttujan arvoilla, mutta ei päinvastoin.

ESIMERKKI 1 Funktio lisää lukuun luvun 3. Lasketaan funktion arvo muuttujan arvoilla 5 ja −2.

Muuttujan arvo / Funktio / Funktion arvo
5 → 5 + 3 → 8
−2 → −2 + 3 → 1

Muuttujan arvo on sijoitettava luku.

Kun lukuun 5 lisätään luku 3, saadaan luku 8. Vastaavasti kun lukuun −2 lisätään luku 3, saadaan luku 1.

ESIMERKKI 2 Funktio korottaa luvun toiseen potenssiin. Mikä on funktion arvo, kun muuttujan arvo on
a) 2 b) 3 c) −3?

Ratkaisu
a) $2^2 = 4$ Funktio korottaa luvun 2 toiseen potenssiin.
b) $3^2 = 9$
c) $(-3)^2 = 9$ Funktion arvo voi olla sama eri muuttujan arvoilla.

9 celsiusasteen lämpötila vastaa 48:aa fahrenheitastetta.

220

HARJOITUSTEHTÄVÄT

1. Funktio lisää lukuun luvun 7. Täydennä.
Muuttujan arvo / Funktio / Funktion arvo
1 → 1 + 7 → □
6 → 6 + 7 → □
0 → 0 + 7 → □

2. Funktio kertoo luvun luvulla 2. Täydennä.
Muuttujan arvo / Funktio / Funktion arvo
5 → 2 · __ → □
6 → 2 · __ → □
0 → 2 · __ → □

3. Funktio lisää lukuun luvun 6. Mikä on funktion arvo, kun sijoitettu luku on
a) 10 b) 2 c) 0 d) −6?

4. Funktio vähentää luvusta luvun 10. Mikä on funktion arvo, kun sijoitettu luku on
a) 12 b) 8 c) 0 d) −10?

5. Kuvio esittää, minkä arvon funktio saa milläkin muuttujan arvolla. Kirjoita sanallisesti funktion sääntö.
a) Muuttujan arvo / Funktio / Funktion arvo
0 → 0; 2 → 4; 5 → 10; 8 → 16
b) Muuttujan arvo / Funktio / Funktion arvo
1 → 4; 2 → 5; 3 → 6; 5 → 8

Kuvio esittää, minkä arvon funktio saa milläkin muuttujan arvolla. Kirjoita sanallisesti funktion sääntö.
6. a) Muuttujan arvo / Funktio / Funktion arvo
0 → 0; 1 → 3; −1 → −3; 5 → 15
b) Muuttujan arvo / Funktio / Funktion arvo
0 → 2; 1 → 3; 2 → 4; 3 → 5

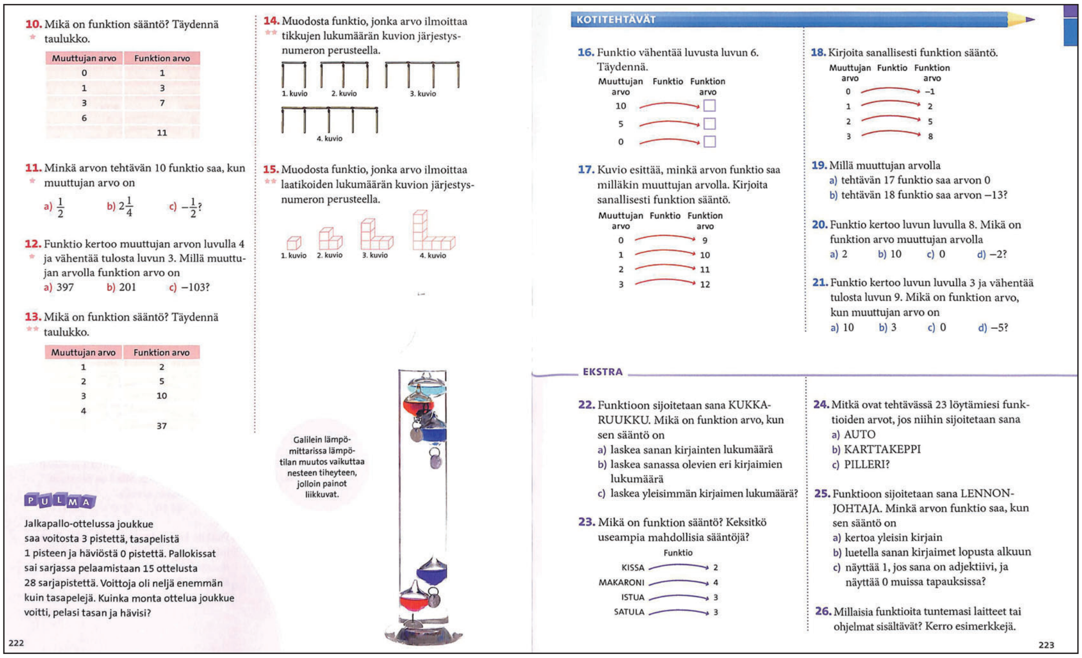
7. a) Muuttujan arvo / Funktio / Funktion arvo
0 → −1; 1 → 1; 3 → 5; 10 → 19
b) Muuttujan arvo / Funktio / Funktion arvo
0 → 0; 1 → −2; 2 → −4; 3 → −6

8. Funktio kertoo luvun luvulla 2 ja vähentää tulosta luvun 5. Mikä on funktion arvo muuttujan arvolla
a) 5 b) 10 c) 0 d) 1?

9. Funktio kertoo luvun luvulla −2 ja lisää tuloon luvun 10. Mikä on funktion arvo muuttujan arvolla
a) 10 b) 0 c) 5 d) −5?

221

図２「6 関数」の前半２ページ（Martti et al., 2022, pp.220-221）


10. Mikä on funktion sääntö? Täydennä taulukko.

Muuttujan arvo	Funktion arvo
0	1
1	3
3	7
6	
	11

11. Minkä arvon tehtävän 10 funktio saa, kun muuttujan arvo on
a) $\frac{1}{2}$ b) $2\frac{1}{4}$ c) $-\frac{1}{2}$?

12. Funktio kertoo muuttujan arvon luvulla 4 ja vähentää tulosta luvun 3. Millä muuttujan arvolla funktion arvo on
a) 397 b) 201 c) −103?

13. Mikä on funktion sääntö? Täydennä taulukko.

Muuttujan arvo	Funktion arvo
1	2
2	5
3	10
4	
	37

PULMA
Jalkapallo-ottelussa joukkue saa voitosta 3 pistettä, tasapelistä 1 pisteen ja häviöstä 0 pistettä. Pallokissat sai sarjassa pelaamistaan 15 ottelusta 28 sarjapistettä. Voittoja oli neljä enemmän kuin tasapelejä. Kuinka monta ottelua joukkue voitti, pelasi tasan ja hävisi?

14. Muodosta funktio, jonka arvo ilmoittaa tikkujen lukumäärän kuvion järjestysnumeron perusteella.
1. kuvio 2. kuvio 3. kuvio 4. kuvio

15. Muodosta funktio, jonka arvo ilmoittaa laatikoiden lukumäärän kuvion järjestysnumeron perusteella.
1. kuvio 2. kuvio 3. kuvio 4. kuvio

Galilein lämpömittarissa lämpötilan muutos vaikuttaa nesteen tiheyteen, jolloin painot liikkuvat.

222

KOTITEHTÄVÄT

16. Funktio vähentää luvusta luvun 6. Täydennä.
Muuttujan arvo / Funktio / Funktion arvo
10 → □; 5 → □; 0 → □

17. Kuvio esittää, minkä arvon funktio saa milläkin muuttujan arvolla. Kirjoita sanallisesti funktion sääntö.
Muuttujan arvo / Funktio / Funktion arvo
0 → 9; 1 → 10; 2 → 11; 3 → 12

18. Kirjoita sanallisesti funktion sääntö.
Muuttujan arvo / Funktio / Funktion arvo
0 → −1; 1 → 2; 2 → 5; 3 → 8

19. Millä muuttujan arvolla
a) tehtävän 17 funktio saa arvon 0
b) tehtävän 18 funktio saa arvon −13?

20. Funktio kertoo luvun luvulla 8. Mikä on funktion arvo muuttujan arvolla
a) 2 b) 10 c) 0 d) −2?

21. Funktio kertoo luvun luvulla 3 ja vähentää tulosta luvun 9. Mikä on funktion arvo, kun muuttujan arvo on
a) 10 b) 3 c) 0 d) −5?

EKSTRA

22. Funktioon sijoitetaan sana KUKKARUUKKU. Mikä on funktion arvo, kun sen sääntö on
a) laskea sanan kirjainten lukumäärä
b) laskea sanassa olevien eri kirjaimien lukumäärä
c) laskea yleisimmän kirjaimen lukumäärä?

23. Mikä on funktion sääntö? Keksitkö useampia mahdollisia sääntöjä?
Funktio
KISSA → 2; MAKARONI → 4; ISTUA → 3; SATULA → 3

24. Mitkä ovat tehtävässä 23 löytämiesi funktioiden arvot, jos niihin sijoitetaan sana
a) AUTO
b) KARTTAKEPPI
c) PILLERI?

25. Funktioon sijoitetaan sana LENNONJOHTAJA. Minkä arvon funktio saa, kun sen sääntö on
a) kertoa yleisin kirjain
b) luetella sanan kirjaimet lopusta alkuun
c) näyttää 1, jos sana on adjektiivi, ja näyttää 0 muissa tapauksissa?

26. Millaisia funktioita tuntemasi laitteet tai ohjelmat sisältävät? Kerro esimerkkejä.

223

図３「6 関数」の後半２ページ（Martti et al., 2022, pp.222-223）

節	見出し	節	見出し
1	数量の依存（対応）関係	14	2つの変数の方程式
2	比率	15	直線のグラフ
3	比例	16	直線上の点
4	反比例	17	直線の傾き
5	比例関係の計算	18	直線の位置と定数項の関係
6	関数	19	直線の方程式の決定
7	グラフと表	20	いろいろな直線
8	グラフの解釈	21	直線の利用
9	関数の値の計算	22	不等式
10	xy 座標における関数のグラフ	23	不等式の解法
11	変数の値の決定	24	2次方程式
12	主要な方程式	25	2次方程式の解法と平方根
13	復習問題	26	復習

図４　「3 関数と方程式」の節

節	見出し	節	見出し
1	文字式	14	方程式の解
2	多項式とその値	15	いろいろな方程式
3	多項式の整理（同類項）	16	方程式は必ず解をもつか？
4	多項式の加法	17	2つの方程式と2つの未知数
5	多項式の減法	18	連立方程式とその解
6	多項式の加法と減法	19	グラフによる連立方程式の解法
7	単項式の積	20	代入法で連立方程式を解く
8	多項式の定数倍	21	代入法の実践
9	単項式と多項式の積	22	加減法で連立方程式を解く
10	多項式の積	23	加減法の実践
11	多項式と定数の商	24	連立方程式の様々な解法
12	複雑な多項式の値	25	現実問題の解決
13	復習	26	復習

図５　「1 多項式と連立方程式」の節

Vuokraamossa elokuvan hinta on 4 euroa. Elsi vuokraa kuukauden aikana 9 elokuvaa. Kuinka suuri on niistä aiheutuva lasku?

Ratkaisu

Vuokrien kokonaishinnan ja vuokrattavien elokuvien lukumäärän välinen riippuvuussuhde voidaan esittää kaavan avulla seuraavasti:

kokonaishinta = vuokrattujen elokuvien lukumäärä · 4 €.

Elsin vuokraamat elokuvat maksavat yhteensä
9 · 4 € = 36 €.

Vastaus: Laskun suuruus on 36 €.

図６　数量の対応関係の問題
（Martti et al., 2022, p.202）

11. Lämpötila kelvineinä K muutetaan celsiusasteiksi C kaavan $C = K - 273$ mukaisesti. Muunna celsiusasteiksi (°C)
a) 290 K b) 325 K c) 190 K d) 0 K.

図７　数２つの数量の依存関係が等式で与えられた問題（Martti et al., 2022, p.203）

Ratkaise verrannosta tuntematon x.

a) $\frac{x}{24} = \frac{5}{6}$　b) $\frac{3}{8} = \frac{x}{24}$　c) $\frac{6}{x} = \frac{8}{25}$

Ratkaisu

a) Koska verrannossa $\frac{x}{24} = \frac{5}{6}$ vasemman puolen nimittäjä 24 on 4 kertaa niin suuri kuin oikean puolen nimittäjä 6, vasemman puolen osoittaja x on 4 kertaa niin suuri kuin oikean puolen osoittaja 5.
$x = 4 \cdot 5 = 20$

図８　比例式の問題（Martti et al., 2022, p.205）

Jos iso maitopurkki eli 1,5 litraa maitoa maksaa 1,20 euroa, hinnan ja määrän suhde on $\frac{1{,}20\ €}{1{,}5\ \mathrm{l}}$.

Suhteen arvo $\frac{1{,}20\ €}{1{,}5\ \mathrm{l}} = 0{,}80$ €/l ilmoittaa maidon litrahinnan.

図９　比率は単位量あたりの大きさであることの説明（Martti et al., 2022, p.208）

	Työtunnit (h)	Palkka (€)	
·2	1	13	·2
	2	26	
	7	91	
	38	494	

図10　２つの数量の関係を表す縦長の表
（Martti et al., 2022, p.208）

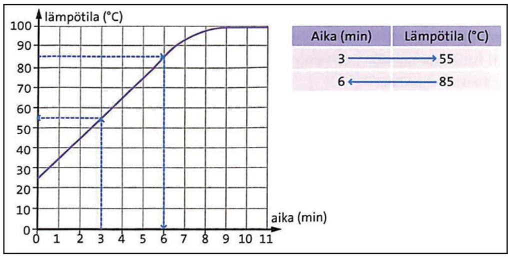


図 11　曲線を含むグラフ
（Martti et al., 2022, p.224）

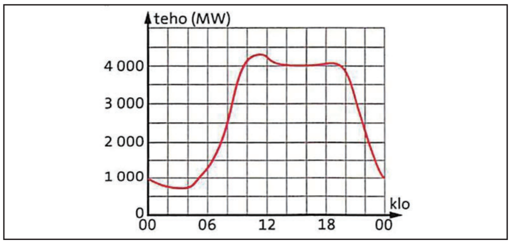


図 12　曲線のグラフ（Martti et al., 2022, p.226）

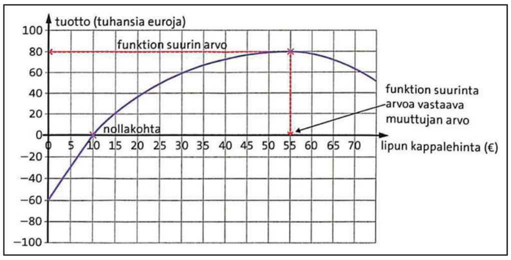


図 13　ゼロ点と最大値を読み取る問題のグラフ
（Martti et al., 2022, p.228）

Funktio f lisää lukuun luvun 3. Kirjoita funktion f sääntö lausekkeena ja laske funktion arvo muuttujan arvolla $x = 5$.

Ratkaisu

Funktion f sääntö voidaan esittää muodossa $f(x) = x + 3$.

Funktion arvoksi saadaan $f(5) = 5 + 3 = 8$.　Merkintä $f(5)$ lue

図 14　関数の規則が文で示され，式表示する問題
（Martti et al., 2022, p.232）

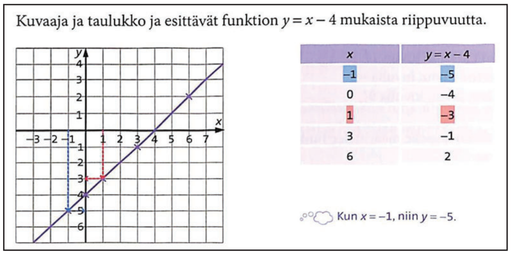
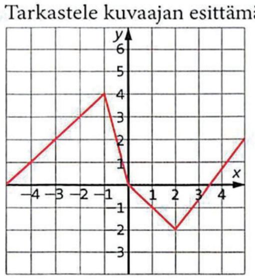


図 15　関数は表とグラフで表されることを確かめる問題（Martti et al., 2022, p.234）

4. Tarkastele kuvaajan esittämää väliä.

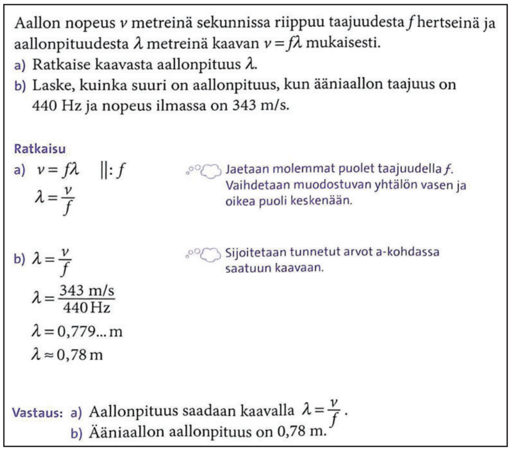


a) Mitkä ovat funktion nollakohdat?
b) Mikä on funktion pienin arvo?
c) Mikä funktion suurin arvo?

図 16　区間ごとに異なる直線となるグラフ
（Martti et al., 2022, p.235）

14. Millä muuttujan x arvolla funktioiden f ja g arvot ovat yhtä suuret?
a) $f(x) = 6x$ ja $g(x) = 2x + 8$
b) $f(x) = x + 3$ ja $g(x) = 2x - 6$

図 17　2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の関数値が等しくなるように変数 x の値を求める問題
（Martti et al., 2022, p.239）



Aallon nopeus v metreinä sekunnissa riippuu taajuudesta f hertseinä ja aallonpituudesta λ metreinä kaavan $v = f\lambda$ mukaisesti.

a) Ratkaise kaavasta aallonpituus λ.

b) Laske, kuinka suuri on aallonpituus, kun ääniaallon taajuus on 440 Hz ja nopeus ilmassa on 343 m/s.

Ratkaisu

a) $v = f\lambda \quad \| : f$

$\lambda = \frac{v}{f}$

Jaetaan molemmat puolet taajuudella f. Vaihdetaan muodostuvan yhtälön vasen ja oikea puoli keskenään.

b) $\lambda = \frac{v}{f}$

$\lambda = \frac{343\ \mathrm{m/s}}{440\ \mathrm{Hz}}$

$\lambda = 0{,}779...\ \mathrm{m}$

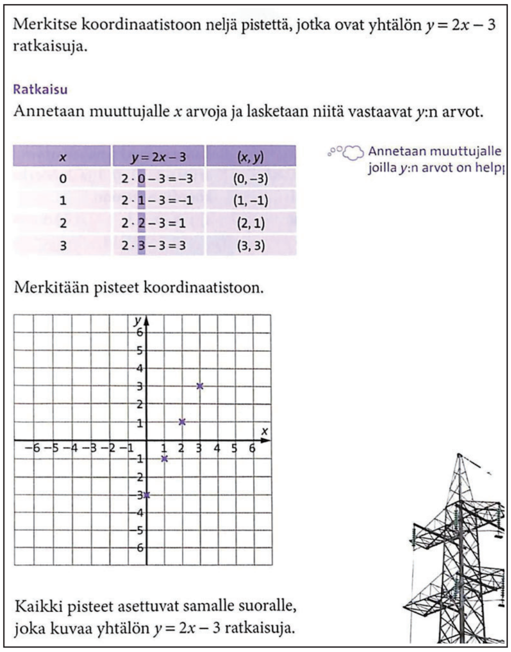
$\lambda \approx 0{,}78\ \mathrm{m}$

Sijoitetaan tunnetut arvot a-kohdassa saatuun kaavaan.

Vastaus: a) Aallonpituus saadaan kaavalla $\lambda = \frac{v}{f}$.

b) Ääniaallon aallonpituus on 0,78 m.

図 18　波の速度に関する問題
（Martti et al., 2022, p.240）



Merkitse koordinaatistoon neljä pistettä, jotka ovat yhtälön $y = 2x - 3$ ratkaisuja.

Ratkaisu

Annetaan muuttujalle x arvoja ja lasketaan niitä vastaavat y:n arvot.

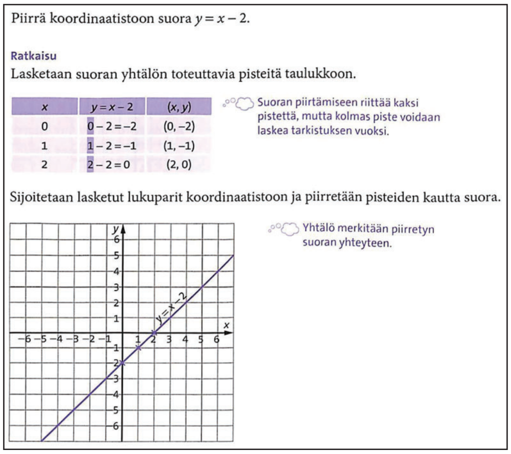
x	$y = 2x - 3$	(x, y)
0	$2 \cdot 0 - 3 = -3$	(0, –3)
1	$2 \cdot 1 - 3 = -1$	(1, –1)
2	$2 \cdot 2 - 3 = 1$	(2, 1)
3	$2 \cdot 3 - 3 = 3$	(3, 3)

Annetaan muuttujalle
joilla y:n arvot on help

Merkitään pisteet koordinaatistoon.

Kaikki pisteet asettuvat samalle suoralle, joka kuvaa yhtälön $y = 2x - 3$ ratkaisuja.

図 19　方程式 y=2x−3 の解を xy 座標平面上にプロットする問題（Martti et al., 2022, p.247）



Piirrä koordinaatistoon suora $y = x - 2$.

Ratkaisu

Lasketaan suoran yhtälön toteuttavia pisteitä taulukkoon.

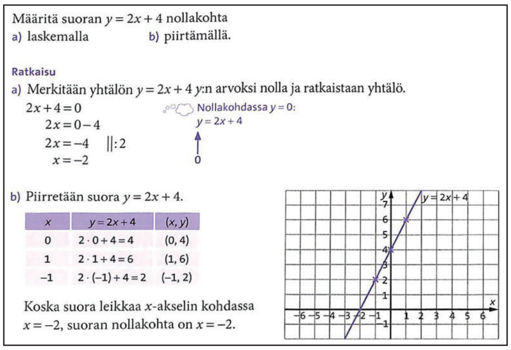
x	$y = x - 2$	(x, y)
0	$0 - 2 = -2$	(0, –2)
1	$1 - 2 = -1$	(1, –1)
2	$2 - 2 = 0$	(2, 0)

Suoran piirtämiseen riittää kaksi pistettä, mutta kolmas piste voidaan laskea tarkistuksen vuoksi.

Sijoitetaan lasketut lukuparit koordinaatistoon ja piirretään pisteiden kautta suora.

Yhtälö merkitään piirretyn suoran yhteyteen.

図 20　x, y に関する 1 次方程式を満たす点をプロットすることでグラフをかく問題
（Martti et al., 2022, p.250）



Määritä suoran $y = 2x + 4$ nollakohta

a) laskemalla　　b) piirtämällä.

Ratkaisu

a) Merkitään yhtälön $y = 2x + 4$ y:n arvoksi nolla ja ratkaistaan yhtälö.

$2x + 4 = 0$

$2x = 0 - 4$

$2x = -4 \quad \| : 2$

$x = -2$

Nollakohdassa $y = 0$:
$y = 2x + 4$
0

b) Piirretään suora $y = 2x + 4$.

x	$y = 2x + 4$	(x, y)
0	$2 \cdot 0 + 4 = 4$	(0, 4)
1	$2 \cdot 1 + 4 = 6$	(1, 6)
–1	$2 \cdot (-1) + 4 = 2$	(–1, 2)

Koska suora leikkaa x-akselin kohdassa $x = -2$, suoran nollakohta on $x = -2$.

図 21　２通りの方法でゼロ点の座標を求める問題
（Martti et al., 2022, p.254）

Piirretään koordinaatistoon suora $y = 3x - 2$.

	x	$y = 3x - 2$	
	0	$3 \cdot 0 - 2 = -2$	
+1	1	$3 \cdot 1 - 2 = 1$	+3
	2	$3 \cdot 2 - 2 = 4$	
	3	$3 \cdot 3 - 2 = 7$	

Suoran $y = 3x - 2$ kulmakerroin on 3. Kun taulukossa muuttujan x arvo kasvaa yhdellä, y:n arvo kasvaa kolmella. Vastaavasti kun kuvaajassa x-koordinaatti kasvaa yhdellä, y-koordinaatti kasvaa kolmella.

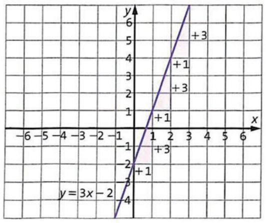
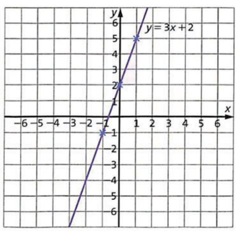


図 22　表とグラフから直線の傾きを求める問題（Martti et al., 2022, p.258）

Piirrä koordinaatistoon suora $y = 3x + 2$. Päättele kuvaajan avulla
a) suoran kulmakerroin
b) vakiotermi.

Ratkaisu

x	$y = 3x + 2$
–1	–1
0	2
1	5



a) Kun x kasvaa yhdellä, y kasvaa kolmella. Kulmakerroin $k = \frac{3}{1} = 3$.

b) Suoran ja y-akselin leikkauspisteessä x-koordinaatti on nolla. Kun yhtälössä $y = 3x + 2$ muuttujalle x annetaan arvo nolla, saadaan $y = 3 \cdot 0 + 2 = 2$. Näin ollen vakiotermi $b = 2$.

図 23　直線の傾きと y 軸との共有点の座標を求める問題（p.262）

Määritä suoran s yhtälö, kun suoran kulmakerroin on 3 ja suora kulkee pisteen (2, 5) kautta.

Ratkaisu
Suoran s kulmakerroin $k = 3$, joten suoran yhtälö on muotoa $y = 3x + b$. Sijoitetaan pisteen (2, 5) koordinaatit $x = 2$ ja $y = 5$ suoran yhtälöön ja ratkaistaan yhtälöstä vakiotermi b.

$$\begin{aligned} 5 &= 3 \cdot 2 + b \\ 5 &= 6 + b \\ 5 - 6 &= b \\ -1 &= b \\ b &= -1 \end{aligned}$$

Vastaus: Suoran s yhtälö on $y = 3x - 1$.

図 24　直線の傾きと直線上の点の座標から直線の方程式を決定する問題（Martti et al., 2022, p.266）

Määritä sen suoran yhtälö, joka kulkee pisteiden (–1, 4) ja (2, –2) kautta.

Ratkaisu
Suoran yhtälö on muotoa $y = kx + b$.

Kulmakerroin on $k = \frac{-2-4}{2-(-1)} = \frac{-2-4}{2+1} = \frac{-6}{3} = -2$.

Ratkaistaan suoran vakiotermi sijoittamalla suoran yhtälöön pisteen (–1, 4) koordinaatit ja kulmakerroin –2.

$$\begin{aligned} 4 &= -2 \cdot (-1) + b \\ 4 &= 2 + b \\ 4 - 2 &= b \\ b &= 2 \end{aligned}$$

Suoran yhtälöön sijoitettu piste voi olla kumpi tahansa suoralle kuuluva piste.

Vastaus: Suoran yhtälö on $y = -2x + 2$.

図 25　2 点の座標から直線の傾きを求め，直線の方程式を決定する問題（Martti et al., 2022, p.269）

Piirrä koordinaatistoon suorat $y = 2$ ja $x = -1$.

Ratkaisu
Suoran yhtälö $y = 2$ tarkoittaa, että kaikilla x:n arvoilla y-koordinaatti on 2.

Suoran yhtälö $x = -1$ tarkoittaa, että kaikilla y:n arvoilla x-koordinaatti on –1.

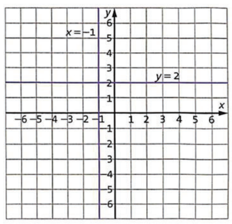
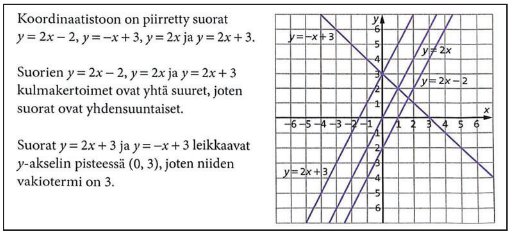


図 26　方程式から x 軸に平行，あるいは垂直な直線をかく問題（Martti et al., 2022, p.271）

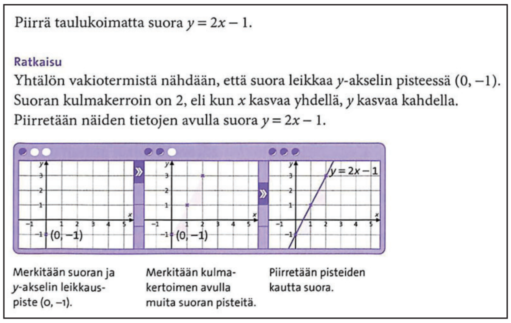


Koordinaatistoon on piirretty suorat $y = 2x - 2$, $y = -x + 3$, $y = 2x$ ja $y = 2x + 3$.

Suorien $y = 2x - 2$, $y = 2x$ ja $y = 2x + 3$ kulmakertoimet ovat yhtä suuret, joten suorat ovat yhdensuuntaiset.

Suorat $y = 2x + 3$ ja $y = -x + 3$ leikkaavat y-akselin pisteessä (0, 3), joten niiden vakiotermi on 3.

図 27　平行な直線と，直線の方程式の定数項を求める問題（Martti et al., 2022, p.271）

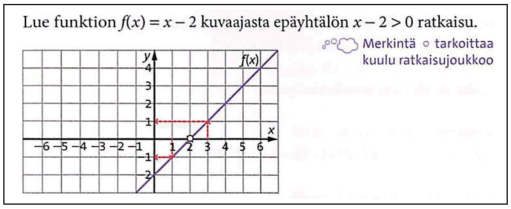


Piirrä taulukoimatta suora $y = 2x - 1$.

Ratkaisu

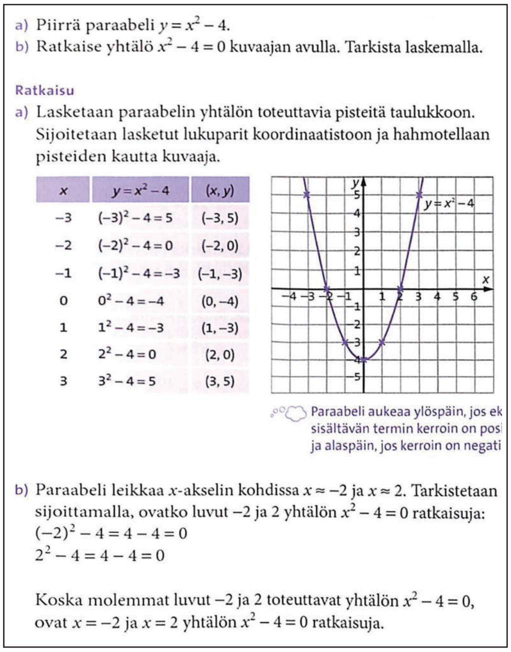
Yhtälön vakiotermistä nähdään, että suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, -1)$. Suoran kulmakerroin on 2, eli kun x kasvaa yhdellä, y kasvaa kahdella. Piirretään näiden tietojen avulla suora $y = 2x - 1$.

図 28　直線の傾きと y 軸との共有点の座標からグラフをかく問題（Martti et al., 2022, p.274）



Lue funktion $f(x) = x - 2$ kuvaajasta epäyhtälön $x - 2 > 0$ ratkaisu.

図 29　グラフを利用しながら不等式の解を求める問題（Martti et al., 2022, p.285）



a) Piirrä paraabeli $y = x^2 - 4$.
b) Ratkaise yhtälö $x^2 - 4 = 0$ kuvaajan avulla. Tarkista laskemalla.

Ratkaisu

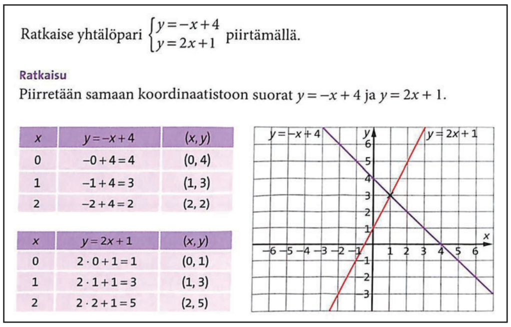
a) Lasketaan paraabelin yhtälön toteuttavia pisteitä taulukkoon. Sijoitetaan lasketut lukuparit koordinaatistoon ja hahmotellaan pisteiden kautta kuvaaja.

x	$y = x^2 - 4$	(x, y)
−3	$(-3)^2 - 4 = 5$	(−3, 5)
−2	$(-2)^2 - 4 = 0$	(−2, 0)
−1	$(-1)^2 - 4 = -3$	(−1, −3)
0	$0^2 - 4 = -4$	(0, −4)
1	$1^2 - 4 = -3$	(1, −3)
2	$2^2 - 4 = 0$	(2, 0)
3	$3^2 - 4 = 5$	(3, 5)

b) Paraabeli leikkaa x-akselin kohdissa $x \approx -2$ ja $x \approx 2$. Tarkistetaan sijoittamalla, ovatko luvut −2 ja 2 yhtälön $x^2 - 4 = 0$ ratkaisuja:
$(-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$
$2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$

Koska molemmat luvut −2 ja 2 toteuttavat yhtälön $x^2 - 4 = 0$, ovat $x = -2$ ja $x = 2$ yhtälön $x^2 - 4 = 0$ ratkaisuja.

図 30　放物線と 2 次方程式の解の関係を扱う問題（Martti et al., 2022, p.291）



Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$ piirtämällä.

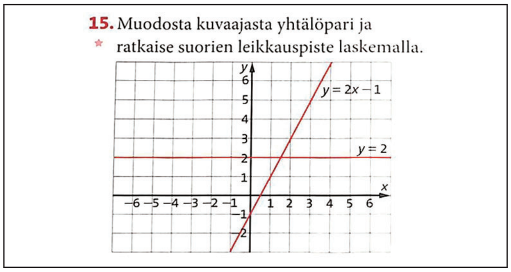
Ratkaisu

Piirretään samaan koordinaatistoon suorat $y = -x + 4$ ja $y = 2x + 1$.

x	$y = -x + 4$	(x, y)
0	$-0 + 4 = 4$	(0, 4)
1	$-1 + 4 = 3$	(1, 3)
2	$-2 + 4 = 2$	(2, 2)

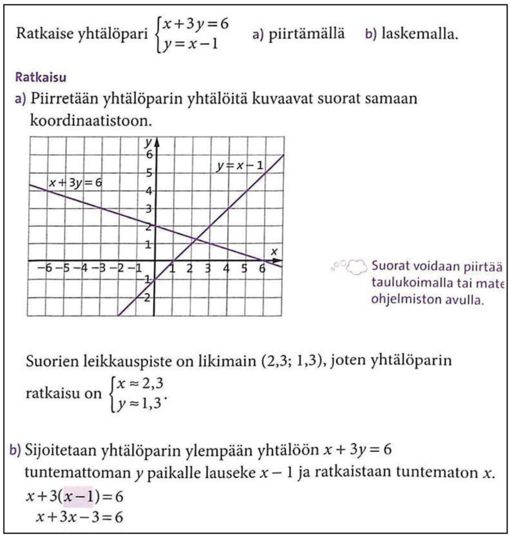
x	$y = 2x + 1$	(x, y)
0	$2 \cdot 0 + 1 = 1$	(0, 1)
1	$2 \cdot 1 + 1 = 3$	(1, 3)
2	$2 \cdot 2 + 1 = 5$	(2, 5)

図 31　連立方程式の解をグラフの共有点として求める問題（Martti et al., 2021, p.66）



15. Muodosta kuvaajasta yhtälöpari ja
ratkaise suorien leikkauspiste laskemalla.

図 32　グラフから連立方程式をたてて解を求める問題（Martti et al., 2021, p.72）



Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} x+3y=6 \\ y=x-1 \end{cases}$ a) piirtämällä b) laskemalla.

Ratkaisu

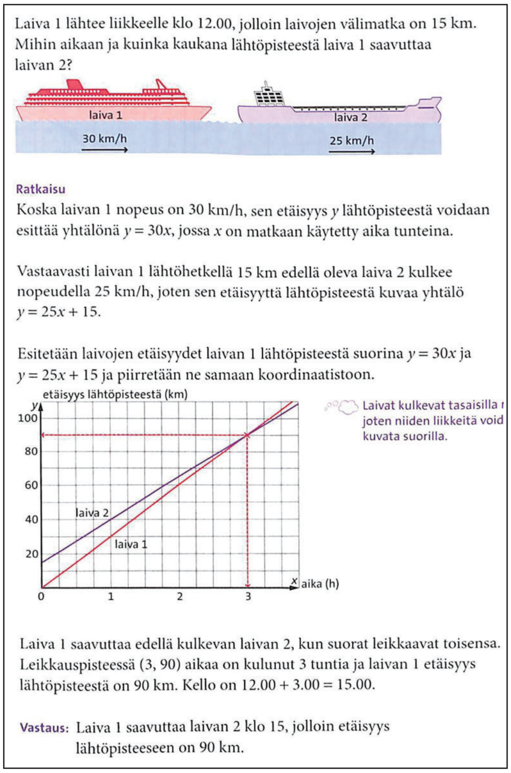
a) Piirretään yhtälöparin yhtälöitä kuvaavat suorat samaan koordinaatistoon.

Suorien leikkauspiste on likimain (2,3; 1,3), joten yhtälöparin ratkaisu on $\begin{cases} x \approx 2{,}3 \\ y \approx 1{,}3 \end{cases}$.

b) Sijoitetaan yhtälöparin ylempään yhtälöön $x + 3y = 6$ tuntemattoman y paikalle lauseke $x - 1$ ja ratkaistaan tuntematon x.

$x+3(x-1)=6$
$x+3x-3=6$

図 33　グラフと計算の２通りで連立方程式を解く問題の一部（Martti et al., 2021, p.82）



Laiva 1 lähtee liikkeelle klo 12.00, jolloin laivojen välimatka on 15 km. Mihin aikaan ja kuinka kaukana lähtöpisteestä laiva 1 saavuttaa laivan 2?

Ratkaisu

Koska laivan 1 nopeus on 30 km/h, sen etäisyys y lähtöpisteestä voidaan esittää yhtälönä $y = 30x$, jossa x on matkaan käytetty aika tunteina.

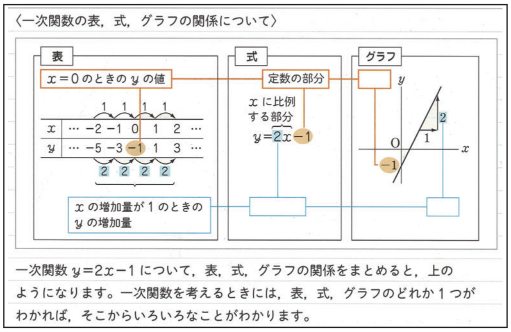
Vastaavasti laivan 1 lähtöhetkellä 15 km edellä oleva laiva 2 kulkee nopeudella 25 km/h, joten sen etäisyyttä lähtöpisteestä kuvaa yhtälö $y = 25x + 15$.

Esitetään laivojen etäisyydet laivan 1 lähtöpisteestä suorina $y = 30x$ ja $y = 25x + 15$ ja piirretään ne samaan koordinaatistoon.

Laiva 1 saavuttaa edellä kulkevan laivan 2, kun suorat leikkaavat toisensa. Leikkauspisteessä (3, 90) aikaa on kulunut 3 tuntia ja laivan 1 etäisyys lähtöpisteestä on 90 km. Kello on 12.00 + 3.00 = 15.00.

Vastaus: Laiva 1 saavuttaa laivan 2 klo 15, jolloin etäisyys lähtöpisteeseen on 90 km.

図 34　現実事象が対象の問題（Martti et al., 2021, p.87）



〈一次関数の表，式，グラフの関係について〉

一次関数 $y=2x-1$ について，表，式，グラフの関係をまとめると，上のようになります。一次関数を考えるときには，表，式，グラフのどれか１つがわかれば，そこからいろいろなことがわかります。

図 35　日本の教科書における表，式，グラフの関係を説明する記述（岡本他，2021b, p.76）

〔謝辞〕
本研究は JSPS 科研費 JP20K02895 の助成を受けたものです。

〔付記〕
本稿は「二澤善紀「フィンランドの教科書からみる関数学習：関数の式・グラフ表示まで」,『2023 年度 数学教育学会 夏季研究会（関西エリア）予稿集』, pp.9-12, 2023. 」を加筆・修正したものである。

〔引用文献〕
経済協力開発機構（OECD）（編集，著），渡辺良（監訳）（2012）『PISA においてから見る，できる国・頑張る国　未来志向の教育を目指す：日本』明石書店 .
熊倉啓之（編著）(2013)『フィンランドの算数・数学教育 -「個の自立」と「活用力の育成」を重視した学び』明石書店 .
文部科学省（2018a）『小学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説　算数編』日本文教出版 .
文部科学省（2018b）『中学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説　数学編』日本文教出版 .
二澤善紀（2020）『算数・数学における関数概念の認識発達を培う理論と実践』ミネルヴァ書房 .
二澤善紀（2022）「フィンランドにおける数学教育の現状：視察を通して」『日本教育実践学会第 25 回研究大会論文集』p.64.
二澤善紀（2023）「フィンランドの教科書からみる関数学習：関数の式・グラフ表示まで」,『2023 年度 数学教育学会 夏季研究会（関西エリア）予稿集』pp.9-12.
二澤善紀（2023）「フィンランドにおける数学教育の現状」,『教育実践学研究 24 巻 2 号』pp.77-78.
岡本和夫，森杉響，根本博，永田潤一郎他 129 名（2021a）『未来へひろがる数学 1』啓林館 .
岡本和夫，森杉響，根本博，永田潤一郎他 129 名（2021b）『未来へひろがる数学 2』啓林館 .
岡本和夫，森杉響，根本博，永田潤一郎他 129 名（2021c）『未来へひろがる数学 3』啓林館 .
清水静海，根上生也，寺垣内政一，矢部敏昭ほか 120 名（2021a）『わくわく算数 4 上・下』啓林館 .
清水静海，根上生也，寺垣内政一，矢部敏昭ほか 120 名（2021b）『わくわく算数 5』啓林館 .
清水静海，根上生也，寺垣内政一，矢部敏昭ほか 120 名（2021c）『わくわく算数 6』啓林館 .
Finnish National Agency for Education (2016). *NATONAL CORE CURRICULUM FOR BASIC EDUCATION 2014.*
Hemmi, K., Krzywacki, H., & Partanen, A-M. (2018). Mathematics Curriculum: The Case of Finland. In D. R. Thompson, M. A. Huntley, & C. Suurtamm (Eds.), *International perspectives on Mathematics Curriculum* (pp. 71-102). Information age publishing.
Martti H., Markus L., Leena M., Kati R., Timo T., Tommi T., & Timo U. (2018). *Pii 7 matematiikka*, Otava.
Martti H., Markus L., Leena M., Kati R., Timo T., Tommi T., & Timo U. (2021). *Pii 9 matematiikka*, Otava.
Martti H., Markus L., Leena M., Kati R., Timo T., Tommi T., & Timo U. (2022). *Pii 8 matematiikka*, Otava.

（にさわ　よしき　教育学科）